ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er FÉVRIER 1937.

PRÉSIDENCE DE M. EMMANUEL LECLAINCHE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** s'exprime en ces termes :

Mes chers Confrères,

La Mort a encore frappé à notre porte : **Louis Mangin** est décédé à Orly, le 27 janvier, après une longue et pénible maladie. Il a été inhumé à Paris, jeudi dernier, en la seule présence de sa famille et de quelques amis.

Né à Paris le 8 septembre 1852, Mangin est un brillant élève de l'École normale spéciale de Cluny, d'où il sort, en 1873, avec le titre d'agrégé de l'enseignement spécial. Sa formation le destine à l'enseignement secondaire. Professeur de sciences naturelles au lycée de Nancy, il poursuit sa préparation universitaire; agrégé de l'enseignement classique, il est professeur au lycée Louis-le-Grand en 1882 et docteur ès sciences l'année suivante, avec une thèse sur « les racines adventives chez les monocotylédones ».

Ses premiers travaux portent sur l'anatomie et la physiologie végétales. Il paraît avoir conservé de ses études à Cluny une dilection marquée pour la chimie. Cette orientation le sert puissamment dans l'étude des membranes végétales qui constitue une des parties essentielles de son œuvre. Il étudie les substances qui accompagnent la cellulose. Par les procédés de la microchimie et des colorations électives, il distingue dans les membranes, en dehors de la cellulose, des composés pectiques et la callose, rare chez les phanérogames, mais habituelle chez les champignons. Ses travaux sur les Mucorinées et les Péronosporées apportent une contribution définitive à cette question, déjà très discutée et cependant fort peu connue.

En physiologie, Mangin entreprend, en collaboration avec Gaston Bonnier, des expériences sur la respiration, la transpiration et l'action chlorophylienne. Elles aboutissent à cette première conclusion que l'oxygène dégagé par les organes verts ne procède pas seulement de la décomposition de l'acide carbonique. Les travaux ultérieurs de Théophile Schlœsing et Laurent devaient confirmer ces résultats en révélant que la source complémentaire d'oxygène résulte de la réduction des nitrates. A partir de 1887, il poursuit seul ses recherches sur les échanges gazeux dans les plantes et sur le rôle des stomates.

Mangin est l'un des fondateurs de la phytopathologie. Il a étudié les maladies du blé, l'encre des châtaigniers, et, avec Viala, la phtiriose de la vigne, la production de la gomme, l'intoxication des arbres dans les villes modernes....

C'est seulement en 1904 qu'il est appelé au Muséum où la chaire de Physique végétale, créée pour Dehérain, a été transformée en un enseignement de la Botanique des Cryptogames. Il étudie patiemment la systématique des Champignons, en s'efforçant à substituer dans la diagnose des constatations précises, souvent d'ordre chimique, aux caractères morphologiques peu stables invoqués jusque-là.

En 1908, il fait connaître une méthode d'analyse des organismes végétaux du plancton qu'il applique, à la Station maritime de Tahitou, aux pêches de la baie de Saint-Vaast. Après le transfert de la station à Saint-Servan, il obtient le rattachement au laboratoire du *Pourquoi-pas?* de Charcot et il continue les examens des récoltes planctoniques des expéditions de l'Antarctique et du Pacifique.

Depuis 1920, Mangin est directeur du Muséum et il conservera cette fonction jusqu'à sa retraite, en 1931. Il obtient du Parlement le vote d'une loi autorisant l'établissement à percevoir une taxe d'entrée qui a permis d'édifier les grands bâtiments destinés à la singerie, à l'orangerie, à la graineterie, tandis que la grande galerie qui groupe les services de la botanique va être construite par l'État avec l'aide de la fondation Rockefeller et qu'un vivarium est créé avec les fonds de la *Journée Pasteur*.

Entre temps, la ferme de Chèvreloup, dépendant du domaine de Versailles, est attribuée au Muséum et un Arboretum y est installé; l'Harmas de Fabre, à Sérignan, acheté par l'État, est aussi rattaché au Muséum, ainsi que le Musée d'Ethnographie du Trocadéro.

Mangin avait été élu dans la Section de Botanique en janvier 1909, en

remplacement de Van Tieghem, élu Secrétaire perpétuel. Il a présidé l'Académie en 1929.

Admirablement préparé à l'enseignement par son long professorat dans les lycées, il fut au Muséum un excellent maître. Sous sa direction, le Muséum connaît une vie nouvelle; sa puissance de volonté s'exerce heureusement sur les pouvoirs publics pour libérer l'établissement de tutelles administratives stérilisantes et pour lui donner, avec des ressources financières permanentes, les moyens de travail indispensables.

Mangin avait le sens et le goût de l'autorité. Celle-ci émanait de toute sa personne; sa stature imposante et l'expression de son visage ne démentaient point l'assurance de sa parole et de ses gestes. Il s'était identifié avec son Muséum et il supporta mal sa mise à la retraite. Depuis ce jour, nous le vîmes décliner peu à peu, jusqu'au moment où il dut déserter nos séances.

Nous saluons respectueusement sa mémoire et nous adressons à sa famille le tribut de nos condoléances.

La séance publique sera levée après l'élection inscrite à l'ordre du jour.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur un problème élémentaire de stratégie.* Note de M. **Émile Borel.**

J'ai repris l'étude d'un problème dont j'avais déjà signalé à diverses reprises l'intérêt, en y introduisant les variables continues. L'énoncé devient alors le suivant :

Deux joueurs A et B ont fait la convention suivante : chacun d'eux choisit secrètement trois nombres positifs rangés dans un ordre déterminé dont la somme est égale à s

$$a_1 + a_2 + a_3 = s, \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = s. \tag{2}$$

Ces choix étant faits, on compare les nombres de même rang et le gagnant est celui qui a choisi deux nombres supérieurs aux nombres correspondants de l'adversaire. Par exemple, si l'on a

$$a_1 > b_1, \qquad a_3 > b_3, \tag{3}$$

A sera le gagnant [1]. Quelle est la tactique T que doit adopter le joueur A

[1] Si l'on avait $a_1 = b_1$, la partie serait nulle.

pour être certain de ne pas avoir une espérance mathématique négative, même si B connaît T et joue en conséquence? On entendra par tactique de A le choix de certaines valeurs des probabilités pour que A joue de telle ou telle manière.

A tout système de nombres vérifiant les égalités (1) ou (2) on peut faire correspondre un point a ou b intérieur à un triangle équilatéral E de hauteur égale à s. Chaque tactique sera définie par une fonction $\varphi(a)$ du point a telle que l'intégrale $\iint \varphi(a)\,d\sigma$ étendue à l'aire totale du triangle, soit égale à l'unité. Si B connaît $\varphi(a)$, il est clair qu'il peut rendre l'espérance mathématique nulle en choisissant la tactique $\varphi(b)$; mais, pour certains choix de $\varphi(a)$, il existe une tactique $\psi(b)$ rendant positive l'espérance mathématique de B, jusqu'au moment où A, informé de la tactique de B, aurait modifié la sienne.

La question posée admet une infinité de solutions; en voici deux particulièrement simples.

Soient C le cercle inscrit dans le triangle E et H l'hexagone régulier circonscrit à C et dont les côtés sont deux à deux parallèles aux côtés de E.

L'une des solutions, que nous appellerons tactique C, consiste à supposer $\varphi(a)$ nul en dehors de C, et à l'intérieur de C, proportionnel à $1/\sqrt{r^2 - \rho^2}$, r étant le rayon de C et ρ la distance de a au centre O de C.

La seconde solution, que nous appellerons tactique H, consiste à supposer $\varphi(a)$ nul à l'extérieur de H et constant sur les hexagones de centre O homothétiques à H, la valeur de $\varphi(a)$ sur le périmètre de chacun de ces hexagones étant proportionnelle au côté de cet hexagone.

Si les deux joueurs A et B adoptent tous deux la tactique C ou tous deux la tactique H, ou l'un d'eux la tactique C et l'autre la tactique H, le jeu est équitable, car l'espérance mathématique est nulle pour chacun d'eux; de plus, il n'est pas possible à l'un d'eux de rendre son espérance mathématique positive en modifiant d'une manière quelconque sa tactique.

Il est aisé de déduire de cette solution du problème avec les variables continues, la solution du problème analogue avec les variables discontinues. Le problème posé peut alors être regardé comme un problème élémentaire de stratégie.

Admettons que deux adversaires A et B soient aux prises sur trois zones, dans chacune desquelles ils ont respectivement des forces égales. De plus, chacun dispose de renforts égaux qu'il peut répartir à son gré entre les trois zones et l'on admet que la victoire dans chacune des zones appar-

tiendra à celui qui y aura massé des forces supérieures. Si l'on pose $s=15$ (il pourra s'agir d'unités constituées, par exemple de divisions ou de corps d'armée), A devra choisir entre les solutions possibles de l'équation

$$a_1+a_2+a_3=15.$$

Le but de chacun des adversaires est d'être victorieux dans deux des trois zones.

La tactique H conduira à la règle suivante. Donnons le coefficient 5 à chacune des 30 distributions que l'on déduit, par permutation, des suivantes : (10, 5, 0), (10, 4, 1), (10, 3, 2), (9, 6, 0), (8, 7, 0), le coefficient 4 aux 24 distributions que l'on déduit par permutation de (9, 5, 1), (9, 4, 2), (9, 3, 3), (8, 6, 1), (7, 7, 1), le coefficient 3 aux 18 distributions déduites de (8, 5, 2), (8, 4, 3), (7, 6, 2), le coefficient 2 aux 12 distributions déduites de (7, 5, 3), (7, 4, 4), (6, 6, 3), et enfin le coefficient 1 aux 6 distributions déduites de (6, 5, 4).

La tactique H′ consistera à mettre dans une urne, pour chacune des distributions, un nombre de boules égal à son coefficient, chaque boule portant inscrite cette distribution ; A tirera au sort parmi les 330 boules de l'urne et adoptera la distribution désignée par le sort. Si la décision de A reste secrète pour B, celui-ci n'a rien de mieux à faire que de tirer au sort dans les mêmes conditions, les chances sont alors égales; les chances resteraient d'ailleurs égales si B choisissait d'une manière arbitraire entre les 90 distributions que nous avons envisagées, en y joignant même la 91e (5, 5, 5); mais, dans ce cas, si A sait que B tire au sort en donnant des chances égales aux 90 ou aux 91 distributions, il pourra trouver une tactique $\theta(a)$ qui lui assurera une espérance mathématique positive. Cette tactique, consistera, par exemple à choisir la distribution (8, 6, 1).

On peut observer que la solution indiquée pour le problème discontinu n'est pas valable pour le problème continu. Si donc A adopte la tactique H′ et si B a la faculté d'adopter des solutions fractionnaires, divisant en trois parties égales l'une de ses unités, il sera possible à B d'adopter une tactique lui assurant une espérance mathématique positive.

On pourrait généraliser de bien des manières les problèmes que nous venons d'étudier; en nous bornant au cas de deux joueurs, considérons les égalités entre nombres réels et positifs :

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=s,$$
$$b_1+b_2+\ldots+b_n=s,$$

et admettons que si $a_k > b_k$, le joueur A gagne à B une somme c_k, tandis que si $b_k > a_k$ c'est le joueur B qui gagne à A une somme c'_k. Il n'est pas nécessaire, pour que le jeu soit équitable, que $c_k = c'_k$, à condition toutefois que certaines relations soient vérifiées par les c_k et les c'_k. Quelles sont les tactiques que doivent adopter A et B ? Le nombre c_k pourrait être fixe, ou pourrait être fonction, soit de la différence $a_k - b_k$, soit même de a_k et de b_k. Dans le cas du problème stratégique, si l'on admettait que l'armée vaincue est entièrement détruite ou faite prisonnière, on serait conduit à supposer $c_k = m_k + b_k$, m_k étant une constante (et naturellement $c'_k = m_k + a_k$).

Beaucoup d'autres problèmes relatifs aux jeux de hasard sont simplifiés par l'introduction de variables continues; c'est le cas notamment pour le jeu de poker.

J'ai développé dans mon Cours de la Faculté des Sciences, qui sera prochainement publié, quelques-uns des sujets traités dans cette Note.

GÉOLOGIE. — *Histoire de l'ancien glacier du Rhône à sa sortie du Bassin de Genève*. Note (1) de MM. **Maurice Gignoux** et **Franck Bourdier**.

Nous avons décrit (2) les terrains fluvioglaciaires des environs de Bellegarde (Ain), et en particulier du défilé du Fort l'Écluse que traverse le Rhône entre la frontière suisse et Bellegarde. Nous en avions conclu que le « Glaciaire néowurmien », défini par W. Kilian, devait être envisagé, non comme correspondant à une avancée glaciaire indépendante, distincte du « Wurmien », mais comme une simple étape dans le retrait de la glaciation wurmienne.

Ces observations nous permettent de résumer comme suit l'histoire des périodes glaciaires et interglaciaires dans cette région.

Une *première extension glaciaire*, que nous conviendrons d'appeler *Riss*, n'a laissé comme témoins que des lambeaux de moraines de fond, déjà connus à Genève (Bois de la Bâthie, Pont Butin) et en amont (Hermance, d'après Jayet), et dont nous venons de décrire de nouveaux affleurements au Pont Carnot, à l'extrémité aval du Bassin de Genève.

Cette glaciation rissienne a donc été suivie d'une grande période d'érosion, au cours de laquelle se sont creusées des vallées antéwur-

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) *Comptes rendus*, **204**, 1939, p. 212.

miennes. Le *bassin de Genève* était alors occupé par un lac ou des marécages, dans lesquels se déposaient les *argiles à lignites du Bois de La Bâthie* : ces dépôts d'eaux tranquilles se prolongeaient vers l'aval jusqu'à l'entrée du défilé du Fort l'Écluse, y donnant des sables et argiles « à faciès lacustre ». Près du pont Carnot, on voit localement des sables et graviers alluviaux inclinés *vers l'amont* (³), déposés peut-être par un petit cours d'eau latéral qui aurait formé dans ce lac un delta, en y amenant des matériaux alpins fournis par la destruction des anciennes moraines rissiennes.

A ce lac et à ces marécages comblés, à succédé un *Rhône préwurmien*, qui a achevé de remplir de sables et graviers le fond du défilé du Fort l'Écluse, ainsi que l'ancienne vallée du plateau de Clarafond. A l'Est de Bellegarde, cet ancien Rhône recevait une *Valserine préwurmienne*, venant du Jura; car les alluvions anciennes des environs de Bellegarde (vers Coupy), près du débouché de la vallée actuelle de la Valserine, sont formées presque uniquement de galets calcaires jurassiens, et non de roches alpines. Et de fait ces alluvions anciennes de Bellegarde ne peuvent avoir été déposées par le Rhône préwurmien, lequel, au Sud de Bange, se dirigeait droit au Sud et passait ainsi à plus de 5^{km} à l'Est de Bellegarde.

C'est sur ce remblaiement alluvial que le *glacier wurmien* s'est avancé; l'emplacement des anciennes vallées a été entièrement noyé sous les moraines, qui ont recouvert tous les plateaux, reposant alors directement sur le socle rocheux.

Puis le glacier s'est retiré; et dans les dépressions se sont déposées des *moraines en vallums*, frontaux ou latéraux : les plus basses sont les moraines « *néowurmiennes* » de Kilian, dessinant une série de stades de retrait qui encerclent le bassin du Léman. Et les vallées actuelles se sont creusées dans des emplacements qui ne coïncident pas toujours avec ceux des vallées préwurmiennes : telle la vallée « épigénique » du Rhône entre Bange et Seyssel.

(³) Il nous paraît impossible d'attribuer cette forte inclinaison (15-20°) à des mouvements tectoniques, comme l'a suggéré Kilian. Remarquons en passant que l'un de nous (M. Gignoux, *Comptes rendus sommaires des séances de la Soc. géol. de France*, 1934, n° 8, p. 98) a récemment signalé des argiles, sables et graviers analogues, également inclinés vers l'amont, le long des berges de l'Isère, à Rovon, à l'extrémité aval « du Bassin de Moirans », lequel représente, pour le glacier de l'Isère, exactement l'équivalent de ce qu'est le Bassin de Genève pour le glacier du Rhône.

Dans cette interprétation, les sables et argiles du Fort l'Ecluse, de même que les argiles à lignites du Bois de La Bâthie, deviennent vraiment « *interglaciaires* », *antéwurmiens* : ils se parallélisent ainsi fort bien avec les « *charbons feuilletés* » des environs de Zurich, qui ont fourni une flore et une faune interglaciaires à *Elephas antiquus*, et avec les *lignites de Voglans* près Chambéry, auxquels l'un de nous a été conduit à attribuer un âge antéwurmien ([1]).

NOMINATIONS.

M. **Jules Richard** est désigné pour représenter l'Académie au Congrès scientifique de l'*Académie méditerranéenne*, à Monaco, les 25, 26 et 27 mars 1937.

COMMISSIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, MM. **Émile Picard**, **Ém. Borel**, **Ch. Fabry**, pour la Division des Sciences mathématiques; MM. **H. Vincent**, **G. Bertrand**, **M. Caullery**, pour la Division des Sciences physiques, sont élus membres de la Commission qui, sous la présidence de M. le Président, sera chargée de dresser une liste de candidats à la place d'Associé étranger vacante par la mort de M. *Emanuele Paterno di Sessa*.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Professor K. Honda, *Anniversary volume*, *october*, 1936.

ARITHMÉTIQUE. — *Sur la répartition modulo* 1 *des puissances successives d'un même nombre*. Note de M. **Charles Pisot**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans ce qui suit les lettres grecques désignent des nombres quelconques et les lettres romaines des entiers rationnels. D'une façon plus particulière

---

([1]) F. Bourdier, *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 997.

ρ représente un entier algébrique supérieur à 1 dont tous les conjugués ont des modules inférieurs à 1. Nous poserons $\lambda\alpha^n = a_n + \varepsilon_n$ où $|\varepsilon_n| < 1/2$.

Théorème I. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ *est convergente,* α *est un nombre* ρ *et* λ *un nombre algébrique du corps de* ρ.

Réciproquement λ étant un nombre algébrique quelconque, on peut toujours trouver des nombres $\rho > 1$ (appartenant au corps de λ) tels que $|\varepsilon_n| < \theta^n$, $\theta < 1$, donc pour lesquels la série $\sum_{n=0} \varepsilon_n^2$ est convergente. Ainsi par exemple le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \cos(\pi\lambda x^n)$ diverge pour toutes les valeurs de $x > 1$ si λ est transcendant et converge pour certaines valeurs de $x > 1$ si λ est algébrique.

La démonstration de ce théorème s'obtient en appliquant le théorème sur le maximum d'un déterminant de M. Hadamard (1) aux déterminants de Kronecker construits avec les entiers $a_0, \ldots, a_n, \ldots$.

On peut en déduire que α est encore un nombre ρ et λ un nombre algébrique si les ε_n ont un seul point d'accumulation vers lequel ils tendent de façon monotone. En effet le nombre $\lambda' = \lambda(\alpha - 1)$ donne alors des valeurs ε'_n toutes de même signe et pour lesquels la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n$ est convergente.

Théorème II. — *Si, à partir d'un certain rang, tous les* ε_n *vérifient l'inégalité* $|\varepsilon_n| \leqq \varepsilon < 1/2(\alpha+1)^2$, *les nombres* λ *et* α *appartiennent à des ensembles dénombrables de nombres.*

L'inégalité montre en effet qu'à partir d'un certain rang

$$\left| a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right| < \frac{1}{2},$$

donc l'entier a_{n+2} est déterminé par les entiers a_n et a_{n+1}. Or, ayant deux entiers a_0 et a_1, on peut construire d'une façon unique une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, où les a_n vérifient l'inégalité précédente. On peut démontrer que, quels que soient a_0 et a_1, $a_1 > a_0$, le rapport a_{n+1}/a_n a toujours une limite $\sigma \geqq 1$ et a_n/σ^n une limite λ pour lesquelles

$$\lambda\sigma^n = a_n + \varepsilon_n, \qquad |\varepsilon_n| \leqq \varepsilon < \frac{1}{2(\sigma - 1)^2}.$$

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 17, 1893, p. 240.

Comme ces suites ne dépendent que de a_0 et a_1, les nombres σ et λ sont dénombrables. Tout nombre ρ est un nombre σ et il est probable que tout nombre σ soit un nombre ρ. Ainsi si $a_0 = 2$ ou 3, σ est un nombre ρ.

Théorème III. — *Pour tout nombre $\alpha > 1$, les valeurs de λ pour lesquelles $|\varepsilon_n| < 1/2(\alpha+1)$ sont au plus en infinité dénombrable*, dans tout intervalle $(n - 1/2, n + 1/2)$ il y en a au plus une.

D'autre part, il existe une infinité de valeurs λ pour lesquelles $|\varepsilon_n| < 1/2(\alpha - 1)$, donc pour lesquelles $|\varepsilon_n| < 1/2$ si $\alpha > 2$.

En effet si $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, $|a_{n+1} - \alpha a_n| < (\alpha + 1)\varepsilon$, donc si

$$\varepsilon = \frac{1}{2(\alpha+1)}, \qquad |a_{n+1} - \alpha a_n| < \frac{1}{2},$$

et la suite $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ est déterminée par a_0 et α. Pour une telle suite il existe alors un nombre λ tel que $|\varepsilon_n| < 1/2(\alpha - 1)$.

Théorème IV. — *Pour tout nombre algébrique α il existe une quantité ε telle que, si $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$, le nombre α est un nombre ρ.*

Soit $b_0\alpha^r + b_1\alpha^{r-1} + \ldots + b_r = 0$, alors on aura

$$b_0 a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \ldots + b_r a_n = -(b_0\varepsilon_{n+r} + b_1\varepsilon_{n+r-1} + \ldots + b_r\varepsilon_n),$$

donc si $\varepsilon < 1/(|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_r|)$ la valeur absolue de l'entier au premier membre est inférieure à 1, donc cet entier est toujours nul et α est un nombre ρ.

Théorème V. — *Les nombres α tels que les ε_n ont un nombre fini de points d'accumulation sont des nombres σ et, s'ils sont algébriques, des nombres ρ.*

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_h$ les points d'accumulation des ε_n. On peut approcher les nombres β_i par des fractions de même dénominateur p_i/q de sorte que $|p_i - \beta_i q| < \varepsilon (i = 1, 2, \ldots, h)$, alors $(q\lambda)\alpha^n = a'_n + \varepsilon'_n$ et $|\varepsilon'_n| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Nous sommes alors dans les conditions des théorèmes II ou IV.

Les mêmes méthodes s'appliquent si les nombres sont complexes, les a_n étant des entiers d'un corps quadratique à éléments imaginaires; ou encore si, à la place de $\lambda\alpha^n$, nous prenons une solution d'une relation de récurrence linéaire quelconque. Cela nous permet d'étudier les cas où nous avons des sommes de la forme $\lambda_1\alpha_1^n + \ldots + \lambda_r\alpha_r^n$, ou encore des expressions telles que $\alpha^n P(n)$, $P(n)$ étant un polynome en n à coefficients quelconques. Les résultats sont analogues, j'y reviendrai dans une Note ultérieure.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur des probabilités en chaînes.* Note (1) de M. **Robert Fortet**, présentée par M. Émile Borel.

Rappelons le problème fondamental de la théorie des probabilités en chaînes *continues* (2) : étant donné, dans un espace à un nombre fini quelconque de dimensions, un ensemble V, borné ou non, mais mesurable, de mesure finie ou non, E et F étant des points variables sur cet ensemble, on considère une famille de fonctions $P^n(E, F)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ continues ou non, définies sur V et satisfaisant aux conditions

$$(P) \qquad P^n(E, F) \geq 0,$$

$$(T) \qquad \int_V P^n(E, F)\, dF = 1,$$

$$(R) \qquad P^{n+m}(E, F) = \int_V P^n(E, G)\, P^m(G, F)\, dG,$$

où les intégrales sont des intégrales de Lebesgue; il faut évidemment supposer que les $P^n(E, F)$ sont telles que les conditions (P), (T), (R) gardent toujours un sens : en particulier, à cause de (T), la fonction de F : $P^n(E, F)$ doit être mesurable sur V quels que soient n et E fixes. On considère d'autre part les fonctions d'ensemble $P^n(E, \omega) = \int_\omega P^n(E, F)\, dF$, et l'on se propose de déterminer le comportement des $P^n(E, F)$ et des $P^n(E, \omega)$ lorsque n croît indéfiniment.

On sait que l'on arrive à des résultats intéressants par application d'une méthode bien connue, dite de Markoff; nous avons pu, en modifiant légèrement la marche suivie habituellement, compléter ces résultats. Appelons $p^n(F)$, $P^n(F)$, $p^n(\omega)$, $P^n(\omega)$ respectivement les bornes inférieures et supérieures des $P^n(E, F)$, $P^n(E, \omega)$ lorsque E varie, et $p(F)$, $P(F)$, $p(\omega)$, $P(\omega)$ les limites, lorsque n croît indéfiniment, des $p^n(F)$, $P^n(F)$, $p^n(\omega)$, $P^n(\omega)$. La méthode de Markoff exige pour être applicable qu'*il existe un rang* $\mathcal{V}$, *un nombre positif* η *et un ensemble mesurable de mesure non nulle* Ω, *tels que l'on ait :* $p^{\mathcal{V}}(F) > \eta$ *sur* Ω; nous supposerons donc dans tout ce qui suit que cette condition, la condition (c) pour abréger, est remplie. On a alors :

(1) Séance du 25 janvier 1936.

(2) Voir par exemple le Mémoire de M. Fréchet dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, 5, 1933, p. 175.

Théorème I. — *Lorsque la condition* (*c*) *est réalisée, les limites* $p(\omega)$ *et* $P(\omega)$ *sont égales et lorsque* n *croît indéfiniment,* $P^n(E, \omega)$ *tend, normalement lorsque* E *et* ω *varient, vers une limite* $\overline{P}(\omega)$ *indépendante de* E *et égale à la valeur commune de* $p(\omega)$ *et* $P(\omega)$.

Théorème II. — *Lorsque la condition* (*c*) *est réalisée, la limite* $\overline{P}(\omega)$ *des* $P^n(E, \omega)$, *qui est évidemment additive au sens restreint, est aussi additive au sens complet et absolument continue sur* V.

Conséquence. — $\overline{P}(\omega)$ est donc une « intégrale définie »; ses diverses dérivées ne diffèrent entre elles qu'en des points appartenant à un ensemble de mesure nulle; choisissons l'une d'elles, soit $\overline{\pi}(F)$; on a

$$\text{(D)} \qquad \int_{\omega} \overline{\pi}(F)\, dF = \overline{P}(\omega).$$

Théorème III. — *Pour* E *fixe quelconque, lorsque la condition* (*c*) *est réalisée,* $P^n(E, \omega)$ *est uniformément « absolument continue » lorsque* n *varie.*

Envisageons particulièrement le cas où V est de mesure infinie; soit alors une suite d'ensembles W_s de mesure finie, tels que

$$W_s \leq W_{s+1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{s=\infty} W = V;$$

par définition, on a : $P^n(E, V) = \lim_{s=\infty} P^n(E, W_s)$; mais on a aussi

Théorème IV. — *Lorsque la condition* (*c*) *est réalisée, pour* E *fixe quelconque,* $P^n(E, V\text{-}W_s)$ *tend vers* o *avec* $1/s$, *uniformément lorsque* n *varie.*

Dans tous les cas, on peut dire que

Théorème V. — *Lorsque la condition* (*c*) *est réalisée,* $P^n(E, F)$ *tend vers la dérivée* $\overline{\pi}(F)$ *de* $\overline{P}(\omega)$ (*donc vers une limite indépendante de* E) *sauf peut-être en des points* F *appartenant à un ensemble de mesure nulle qui, lui, peut dépendre de* E.

De V et de (R) on déduit le théorème suivant, indiqué par M. Fréchet dans son Mémoire cité, théorème plus précis que V à certains égards, mais valable seulement pour les points F tels que P(F) soit finie :

Lorsque la condition (*c*) *est réalisée, en tout point* F *tel que* P(F) *soit finie,* $P(F) = p(F)$ *et lorsque* n *croît indéfiniment* $P^n(E, F)$ *tend, normalement lorsque* E *varie, vers une limite indépendante de* E *et égale à la valeur commune de* P(F) *et* p(F).

D'autre part, ayant défini le cas quasi régulier comme celui où, lorsque n croît indéfiniment, $P^n(E, F)$ tend vers une limite indépendante de E,

soit $\bar{\pi}(F)$, uniformément lorsque E varie, sauf peut-être si F appartient à un certain ensemble de mesure nulle, M. Fréchet demande dans son Mémoire [note (5), p. 205] : *peut-on trouver des cas quasi réguliers tels que l'on ait* $0 < \int_V \bar{\pi}(F)\, dF < 1$; il faut répondre *non*; en effet : ou bien $\bar{\pi}(F)$ est nulle, sauf peut-être en des points appartenant à un ensemble de mesure nulle; alors $\int_V \bar{\pi}(F)\, dF = 0$. Notons que ce cas se présente effectivement; ou bien il existe un ensemble mesurable de mesure non nulle sur lequel $\bar{\pi}(F)$ est positive : on en déduit aisément que la condition (c) est satisfaite, et que, d'après V et (D), on a

$$\int_V \bar{\pi}(F)\, dF = \bar{P}(V) = 1.$$

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur une extension de la loi des grands nombres.* Note de M. **Daniel Dugué**, présentée par M. Emile Borel.

1. M. Khintchine [1] a établi la proposition suivante :

Pour que la moyenne arithmétique d'une suite de variables aléatoires $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *ayant la même loi de probabilité converge en probabilité vers un nombre fixe* a, *il suffit que la valeur moyenne de ces variables existe et soit égale à* a.

Le but de cette Note est de fournir une condition *nécessaire et suffisante* de convergence en probabilité et de mettre en évidence des variables aléatoires n'ayant pas de valeurs moyennes et dont la moyenne converge néanmoins en probabilité.

Si $\varphi(t) = \exp\{\psi(t)\}$ est la fonction caractéristique d'une variable, $\exp\{n\psi(t/n)\}$ est celle de la moyenne et il se déduit des résultats de M. Paul Lévy (*Cours de Calcul des Probabilités*) que pour que $\Sigma x_i/n$ converge vers a en probabilité il faut et il suffit que dans tout intervalle borné de t, $n\psi(t/n)$ tende uniformément vers iat, ce qui entraîne donc que $\psi(t)$ soit dérivable pour $t = 0$, et que la dérivée soit égale à ia (en effet $\psi(0) = 0$). Donc

La condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma x_i/n$ *converge en probabilité*

(1) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 477.

vers a est que la fonction caractéristique soit dérivable à l'origine, la dérivée étant ia.

S'il y a une valeur moyenne il y a une dérivée première. Nous retrouvons donc le théorème de M. Khintchine. Mais il peut se faire qu'il y ait une dérivée première sans qu'existe une valeur moyenne. L'exemple suivant le prouve. Soit la variable aléatoire X susceptible de prendre des valeurs extérieures à l'intervalle -2, $+2$ la loi de probabilité élémentaire étant $K\,dx/x^2(\log|x|)^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$, K étant une constante. La valeur moyenne de X n'est pas définie. En vertu de la symétrie de la loi de probabilité élémentaire la fonction caractéristique sera $2K\int_2^{+\infty}\frac{\cos tx\,dx}{x^2(\log x)^\alpha}$. La dérivée à l'origine sera la limite si elle existe de la quantité

$$-2K\int_2^{+\infty}\frac{1-\cos\Delta t x}{\Delta t}\,\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}$$

quand Δt tend vers 0. Nous partagerons l'intégrale en deux parties I_1 de 2 à $2\pi/\Delta t$, I_2 de $2\pi/\Delta t$ à $+\infty$,

$$I_2=\int_{\frac{2\pi}{\Delta t}}^{+\infty}\frac{1-\cos\Delta t x}{\Delta t}\,\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}<\frac{2}{\Delta t}\int_{\frac{2\pi}{\Delta t}}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}=\frac{Y}{\pi}\int_Y^{+\infty}\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}$$

en posant $2\pi/\Delta t = Y$.

En partageant l'intervalle d'intégration de Y à hY, ..., $h^{n-1}Y$ à h^nY, ... $(h>1)$ il est facile comme $x^2(\log x)^\alpha$ est croissant de majorer I_2 :

$$I_2<\frac{Y}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{h^nY}^{h^{n+1}Y}\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}<\frac{Y}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(h-1)h^nY}{(h^nY)^2(\log h^nY)^\alpha}=\frac{h-1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{h^n(\log h^nY)^\alpha},$$

Cette série est toujours convergente; elle est inférieure à

$$\frac{h-1}{\pi(\log Y)^\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{h^n}=\frac{h}{\pi(\log Y)^\alpha}$$

Quand $\Delta t \to 0$, I_2 tend donc vers 0.

$$I_1=\int_2^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\frac{1-\cos\Delta t x}{\Delta t}\,\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}<\int_2^{\frac{2\pi}{\Delta t}}\frac{\Delta t}{2}x^2\,\frac{dx}{x^2(\log x)^\alpha}=\frac{\pi}{Y}\int_2^{Y}\frac{dx}{(\log x)^\alpha}.$$

En intégrant de 2 à $2h$, ... (Y étant $2h^n$), on voit que

$$I_1 < \frac{\pi}{2h^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2(h-1)h^i}{(\log 2h^i)^\alpha} < \frac{(h-1)\pi}{(\log h)^\alpha}\frac{1}{h^n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h^i}{i^\alpha}.$$

La quantité $\frac{1}{h^n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h^i}{i^\alpha}$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$. En effet soit $n = p + q$,

$$\frac{1}{h^n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h^i}{i^\alpha} = \frac{1}{h^{p+q}}\left[\sum_{i=1}^{p-1}\frac{h^i}{i^\alpha} + \sum_{i=p}^{p+q-1}\frac{h_i}{i^\alpha}\right] < \frac{1}{h^{p+q}}\left\{\frac{h^p-1}{h-1} + \frac{h^p}{p^\alpha}\left[\frac{h^q-1}{h-1}\right]\right\},$$

ce qui est inférieur à $(1/h-1).(1/h^q+1/p^\alpha)$. En prenant q et p assez grands on voit que l'on peut rendre I_1 inférieur à un nombre positif donné. La fonction caractéristique de la variable aléatoire est donc dérivable à l'origine. Par conséquent $\Sigma x_i/n$ converge en probabilité vers o, bien que X n'ait pas de valeur moyenne.

GÉOMÉTRIE. — *Études sur le tétraèdre.*

Note de M. **Paul Delens**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Les résultats exposés (¹) permettent l'extension au tétraèdre $\mathfrak{T}$ de certaines figures de Brocard du triangle. Je garderai en général les notations précédentes, les références aux Notes en question étant indiquées par [1] et [2], mais désignerai par J_1, J_2, J_3 au lieu de λ, μ, ν, les angles d'un triangle Θ *associé* à $\mathfrak{T}$. Les propriétés obtenues confirment l'importance du système d'angles A, B, C, D, J_1, J_2, J_3 [1].

Je définis pour le tétraèdre général deux *angles de Brocard* $\mathfrak{U}$, U par

(1) $$ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = 24\,V\cot\mathfrak{U},$$

(2) $$\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = \cot U,$$

avec

(3) $$\frac{\cot U}{\cot\mathfrak{U}} = \frac{4\sin J_1 \sin J_2 \sin J_3}{\sin J_1 + \sin J_2 + \sin J_3} \Rightarrow \frac{2\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}},$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_0$ étant les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un triangle Θ. Les coordonnées normales absolues des points L [2] et O sont

(L) $$d_J = \frac{3V}{\rho}R\sin J \quad \text{avec} \quad \rho = R\Sigma(s_J\sin J) = 6V\cot\mathfrak{U},$$

(O) $$d'_J = R\cos J, \qquad J = A, B, C, D,$$

(¹) *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 837-839 et 1213-1215.

et

$$(4) \qquad \rho^2 d_J^2 + 9V^2 d_J'^2 = 9V^2R^2;$$

en posant

$$\cos U' = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 9V^2}}, \qquad \sin U' = \frac{3V}{\sqrt{\rho^2 + 9V^2}}, \qquad \frac{\cos U' d_J \pm i \sin U' d_J'}{\cos U' \pm i \sin U'} = \begin{cases} \delta_J' \\ \delta_J'' \end{cases},$$

les relations (4), ou $\delta_J' \delta_J'' = 9V^2R^2$, traduisent l'existence, sur la droite OL de Brocard, de deux points conjugués complexes ϖ' et ϖ'', *isogonaux*, foyers d'un *cercle de Brocard* $\mathfrak{L}$, lui-même cercle focal d'un *ellipsoïde de révolution de Brocard* $\mathcal{E}$, aplati, inscrit à $\mathcal{T}$; ϖ' et ϖ'' étant conjugués harmoniques de L et O, $\mathfrak{L}$ appartient à la sphère (OL) de Brocard [2] et est vu de O sous l'angle $2U'$; or $\cot U' = 2 \cot \mathfrak{U}$.

2. Pour le tétraèdre isodynamique ($aa' = bb' = cc'$) subsiste un seul angle de Brocard, $U = \mathfrak{U}$; des simplifications importantes résultent de la relation [1]

$$(5) \qquad \sum_3 (\cot D \cot A + \cot B \cot C) = \frac{3}{4},$$

et accentuent l'analogie avec le cas du triangle. Il existe ici ∞^1 sphères T de Tucker [2], centrées sur OL et coupant les arêtes de $\mathcal{T}$ aux sommets de quatre triangles associés égaux. Les sphères de similitude de deux sphères T passent par un cercle réel $\mathfrak{Q}$, situé sur (OL) et vu de O sous l'angle $2U''$ tel que $\cot U = \sqrt{2} \cot U''$; $\mathfrak{Q}$ est cercle focal d'un ellipsoïde de révolution aplati $\mathcal{F}$, enveloppe des sphères T, non inscrit à $\mathcal{T}$; $\mathfrak{Q}$ et $\mathcal{F}$ sont, *pour le tétraèdre isodynamique*, un *second cercle* et un *second ellipsoïde de Brocard*.

3. L'inversion tétraédrique *normale*, par points isogonaux, est un cas particulier de ∞^3 transformations birationnelles involutives analogues, d'ordre 3, relatives à T. Chaque *inversion tétraédrique* (I) peut être définie, avec le système de coordonnées correspondant, par $xx' = yy' = zz' = tt'$. Une paire de points M, M', inverses pour (I), dépend de 3 paramètres : les droites portant une telle paire, *cas de* OL *du* n° 1, forment un complexe. Sans détailler l'étude de (I), insistons sur quelques points.

A un plan P correspond une surface cubique K' passant par les arêtes de $\mathcal{T}$; à une droite Δ une cubique gauche Γ'. Il est indiqué de considérer le système linéaire (Q), à 5 paramètres, des quadriques circonscrites à $\mathcal{T}$,

---

([2]) V. Thébault, *Mathesis*, 1932, supplément.

d'équation

$$\lambda tx + \lambda' xy + \mu ty + \mu' zx + \nu tz + \nu' xy = 0. \tag{6}$$

Si M décrit une quadrique Q, son inverse M' décrit une quadrique Q' et les systèmes linéaires ∞^4 des quadriques Q par M, Q' par M', se correspondent dans l'échange de λ et λ', μ et μ', ν et ν', *involution* (i) *dans l'espace* E_5 *du système* (Q). A une droite Δ correspond un réseau linéaire de (Q), à son inverse Γ' un second réseau linéaire. En général ces deux réseaux n'ont aucune quadrique commune. Mais pour une droite Δ du complexe, corde MM' de Γ', les deux réseaux ont en commun le faisceau de quadriques dont Δ et Γ' constituent l'intersection.

Soient, pour une droite M_1M_2, les coordonnées plückériennes

$$u = y_1z_2 - y_2z_1, \quad u' = t_1x_2 - t_2x_1, \quad v,\ v',\ w,\ w'; \tag{7}$$

le réseau correspondant de (Q) est défini par (6) et les conditions

$$\frac{\lambda'}{u'} = \frac{\nu}{w} - \frac{\mu}{v}, \quad \frac{\mu'}{v'} = \frac{\lambda}{u} - \frac{\nu}{w}, \quad \frac{\nu'}{w'} = \frac{\mu}{v} - \frac{\lambda}{u}. \tag{8}$$

Adjoignons à (8) le système en résultant par (i). Si les deux systèmes ont une solution commune, leur résolution en λ', μ', ν', par exemple, exige l'annulation du déterminant des coefficients de ces variables, soit

$$uv'w' + vw'u' + wu'v' + uvw = 0, \tag{9}$$

équation du complexe, du troisième ordre. Mais alors le rang de la matrice du déterminant s'abaisse à *un*, d'où le faisceau indiqué, dont l'équation s'obtient en conservant dans (6), d'après (8), les paramètres λ, μ, ν liés par la seule relation

$$\frac{\lambda}{u'} + \frac{\mu}{v'} + \frac{\nu}{w'} = 0.$$

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE. — *Suites de Laplace pour lesquelles les surfaces d'indice de même parité ont leurs asymptotiques en correspondance.* Note de M. **Serge Finikoff.**

1. Soit $\ldots M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$ une suite de Laplace dont chaque rayon M_iM_{i+1} enveloppe sur la nappe focale (M_i) une ligne $v = \text{const.}$, sur (M_{i+1}) une ligne $u = \text{const.}$ Désignons par (k_{i-1}, k_i), (K_{i-1}, K_i) les invariants de Darboux ponctuels et tangentiels se rapportant au réseau

focal (u, v) de (M_i) et appelons *invariants de la congruence* $(M_i M_{i+1})$ les invariants k_i, K_i communs aux deux réseaux focaux (M_i), (M_{i+1}).

Si les asymptotiques de (M_i) sont $a\,du^2 + b\,dv^2 = 0$, celles de (M_{i+1}) sont $K_i a\,du^2 + k_i b\,dv^2 = 0$; par suite les asymptotiques se correspondent sur toutes les nappes d'indice pair d'une part, sur celles d'indice impair de l'autre, si la relation

$$K_i K_{i+2} = k_i k_{i+2} \tag{1}$$

est vérifiée pour chaque indice i. En introduisant une fonction auxiliaire λ, on peut remplacer (1) par

$$K_{2n} = \lambda k_{2n}, \qquad K_{2n+1} = \frac{k_{2n+1}}{\lambda},$$

et, en portant ces expressions dans l'équation de Darboux

$$k_{i-1} + k_{i+1} = 2k_i - \frac{\partial^2 \log k_i}{\partial u\, \partial v}, \tag{2}$$

on obtient

$$(\lambda - 1)[k_{2n-1} - k_{2n+1} + \lambda(k_{2n} - k_{2n+2})] = 0.$$

Si λ est égal à 1, les asymptotiques se correspondent sur toutes les nappes focales (M_i) et la suite est (R). Si λ est différent de 1, on obtient, pour chaque indice n, les relations

$$k_{2n} = k + n\mu, \qquad k_{2n+1} = h - n\lambda\mu, \qquad \mu(\lambda + 1) = 0; \tag{3}$$

de sorte que, ou bien $\mu = 0$, ou bien $\lambda = -1$.

2. Si $\lambda = -1$, *les asymptotiques de chaque nappe d'indice pair* (M_{2n}) *correspondent à un réseau conjugué de* (M_{2n+1}), *donc, chaque congruence* $(M_{2n} M_{2n+1})$ *de la suite est une congruence de Waelsch;* mais il n'existe pas de suite de Laplace dont quatre congruences successives sont du type de Waelsch, de sorte que $\lambda = -1$ *doit être écarté; on doit donc simplement retenir* $\mu = 0$; on a $k_{2n} = k$, $k_{2n+1} = 1/k$, $K_{2n} = K$, $K_{2n+1} = 1/K$ et l'on obtient une solution avec deux fonctions arbitraires d'un argument. Chaque congruence de la suite est projectivement équivalente à celle que l'on obtient par une double application de la transformation de Laplace.

3. En revenant aux congruences de Waelsch, on doit noter que les deux congruences encadrant une telle congruence dans la transformation de Laplace ne peuvent être toutes deux W. Une congruence W $(M_2 M_3)$, dont les transformées de Laplace $(M_1 M_2)$ et $(M_3 M_4)$ sont du type de Waelsch, appartient à un complexe linéaire; la droite $M_1 M_4$ touche alors les nappes

(M_1), (M_4) et engendre une congruence appartenant au même complexe linéaire. Inversement, une suite de Laplace M_1, M_2, M_3, M_4, telle que la droite M_1M_4 admette (M_1) et (M_4) pour nappes focales, contient deux congruences de Waelsch, (M_1M_2) et (M_3M_4), et les congruences (M_2M_3) et (M_1M_4) appartiennent au même complexe linéaire.

ESPACES ABSTRAITS. — *Sur les relations entre les espaces de Linfield et les complexes.* Note [1] de M. **Antoine Appert**, présentée par M. Élie Cartan.

L'objet de cette Note est de montrer que l'on peut faire correspondre à tout ensemble topologique A homéomorphe à un complexe simplicial rectiligne, un espace de Linfield (ne comprenant qu'un nombre fini de points si le complexe envisagé est fini) tel que la connaissance de cet espace de Linfield détermine complètement le type topologique de A. Il y a là, croyons-nous, une source d'utiles rapprochements entre la théorie des espaces abstraits et la topologie dite combinatoire.

I. Nous rappelons que l'on appelle *espace de Linfield* [2] un ensemble P d'éléments appelés *points* où l'on a défini une relation dite de *conjugaison* qui a lieu ou non pour tout couple de points de P, indépendamment de l'ordre de ces deux points. Selon que cette relation a lieu ou non, on dit que les deux points sont *conjugués* ou non. Il est commode de considérer chaque point comme conjugé de lui-même.

Un espace de Linfield peut être considéré comme un espace $(\mathcal{V})$ au sens de M. Fréchet (*Op. cit.*, p. 173); il suffit pour cela d'y prendre comme voisinage unique d'un point quelconque a, l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont conjugués de a. Pour tout espace de Linfield, on peut donc parler de son « type topologique », auquel nous donnerons le nom de *type linfieldien*. Deux espaces de Linfield ont le même type linfieldien s'ils sont homéomorphes au sens de la théorie des espaces $(\mathcal{V})$; et pour cela il faut et il suffit qu'ils se correspondent biunivoquement avec conservation de la relation de conjugaison.

D'autre part on appellera *complexe simplicial rectiligne* [3], ou plus brièvement

---

[1] Séance du 25 janvier 1937.

[2] Voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 180-181.

[3] Comparer avec Alexandroff et Hopf, *Topologie*, Berlin, 1935, p. 129. Dans cet ouvrage (p. 132) M. Alexandroff considère un complexe C comme un « espace discret » dont les *points* sont les simplexes de C, et où la *fermeture* d'un ensemble E est obtenue en ajoutant à E toutes les faces des simplexes de E. Cet espace est tout différent de l'espace L(C) défini plus loin.

complexe C le système constitué par un nombre fini ou une infinité dénombrable de simplexes rectilignes appartenant à un espace cartésien R et satisfaisant aux conditions suivantes : toute face d'un simplexe de C appartient à C. Étant donné deux simplexes quelconques de C, ou bien ils sont sans point commun, ou bien leur intersection est une face de chacun d'eux, ou bien l'un est une face de l'autre, mais ils ne sont jamais identiques. Si enfin C^* désigne l'ensemble topologique constitué par tous les points de R qui appartiennent à au moins un simplexe de C, on suppose que chaque point de C^* possède un entourage dans C^* qui n'a de points communs qu'avec un nombre fini de simplexes de C.

Un ensemble est dit homéomorphe à un complexe C s'il est homéomorphe à C^*.

II. Ces notions étant rappelées, nous ferons correspondre à chaque complexe C l'espace de Linfield L(C) *dont les points sont les sommets de* C *et où deux points sont considérés comme conjugés si et seulement s'ils sont sommets d'un même simplexe de* C.

En général la donnée de L(C) ne détermine pas complètement C. Par contre la donnée de L(C) détermine complètement C quand la condition suivante est remplie :

L. Pour qu'un ensemble E de points de L(C) constitue l'ensemble des sommets d'un même simplexe de C, il faut et il suffit que deux points arbitrairement pris dans E soient toujours conjugués (c'est-à-dire soient toujours deux sommets d'un même simplexe de C).

Nous appellerons *complexe linfieldien* tout complexe satisfaisant à la condition L. On a le théorème suivant :

Tout complexe dérivé (c'est-à-dire obtenu par subdivision barycentrique d'un complexe donné) *est linfieldien.*

En effet, on sait que le simplexe général du complexe dérivé C′ d'un complexe C est le simplexe dont les sommets sont les centres de gravité de chacun des simplexes d'une famille quelconque F de simplexes distincts, appartenant à C et tels qu'étant donné deux simplexes quelconques de F, il y en a toujours un qui est une face de l'autre.

Soit alors E un ensemble de points de L(C′) tel que deux points quelconques de E soient conjugés dans L(C′). Chaque point a de E est centre de gravité d'un et d'un seul simplexe de C; nous désignons ce simplexe par S(a). De plus, deux points distincts quelconques a et b de E sont deux sommets d'un même simplexe de C′. Donc les deux simplexes S(a) et S(b) sont tels que l'un des deux est une face de l'autre. Par conséquent E est l'ensemble des sommets d'un même simplexe de C′. C. Q. F. D.

III. Le théorème précédent montre que *tout ensemble topologique* A *homéomorphe à un complexe donné est homéomorphe à un complexe linfiel-*

dien K (par exemple au dérivé du complexe donné). *La connaissance du type linfieldien de* L(K) *détermine complètement les relations d'incidence de* K, *et détermine donc complètement le type topologique de* A. La donnée d'un type linfieldien (où n'intervient que l'unique relation de conjugaison) pour déterminer le type topologique de A, constitue en soi quelque chose de plus simple que la donnée des relations d'incidence d'un complexe ([5]). Toute la théorie de l'*homologie* peut d'ailleurs se construire dans les espaces de Linfield en y appelant *simplexe* tout ensemble de points conjugués deux à deux; et les résultats précédents montrent que toutes les circonstances rencontrées dans la théorie de l'homologie des chaînes de simplexes d'un complexe, se retrouveront dans les espaces de Linfield ([6]). Remarquons encore qu'il y a identité complète entre les transformations *simpliciales* abstraites d'un complexe linfieldien K *dans* un complexe linfieldien k et les transformations univoques et *continues* [au sens de la théorie des espaces ($\mathcal{V}$)] de l'espace L(K) dans L(k); ces transformations ne sont autres que les transformations univoques de L(K) dans L(k) qui transforment toujours deux points conjugués en deux points conjugués (éventuellement identiques).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Le problème de Souslin et les espaces abstraits* ([1]). Note ([2]) de M. **Georges Kurepa**, présentée par M. Jacques Hadamard.

$\mathcal{F}$ étant une famille d'ensembles, nous désignerons par $p_c\mathcal{F}$ et $p_d\mathcal{F}$ la borne supérieure des puissances des familles d'ensembles extraites de $\mathcal{F}$ et bien ordonnées par rapport à $\subset$ et $\supset$, respectivement; $p_s\mathcal{F}$ désignera la borne supérieure des puissances des familles disjonctives extraites de $\mathcal{F}$.

E étant un espace abstrait, on désignera par $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}$(E) la famille de

---

([5]) Et a l'avantage de rejoindre le point de vue des physiciens (cf. J.-L. Destouches) qui considèrent l'espace de Linfield comme constituant la meilleure image de l'espace physique.

([6]) Puisqu'une subdivision, et en particulier le remplacement d'un complexe par son dérivé, n'altère pas les propriétés d'homologie.

([1]) Voir aussi la Note des *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1049-1052; la terminologie et les notations seront celles de cette même Note.

([2]) Séance du 25 janvier 1937.

tous les ensembles ouverts de E; le signe $\mathcal{C}\mathcal{G}$ ou $\mathcal{C}\mathcal{G}(E)$ représentera la famille des *composants* des ensembles ouverts de l'espace.

En remarquant que, $\mathfrak{T}$ étant un tableau ramifié quelconque d'ensembles décroissants (croissants) appartenant à l'espace [3], la famille $\mathcal{C}\mathfrak{T}$ des composants des éléments de $\mathfrak{T}$ est encore un tableau ramifié d'ensembles décroissants (croissants); on peut démontrer le

Théorème I. — *Tout espace* (V), *localement connexe et infini, vérifie* $p_c\mathcal{G} = p_c\mathcal{C}\mathcal{G} + p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$ *et* $p_d\mathcal{G} \geq p_d\mathcal{C}\mathcal{G} + p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$ *; pour que, pour tout espace* (V) *localement connexe et infini,* $p_d\mathcal{G} = p_d\mathcal{C}\mathcal{G} + p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$, *il faut et il suffit que, quel que soit le tableau ramifié infini* T, *on ait* $b\mathrm{T} = p\mathrm{T}$ [4].

Je ne connais aucun espace abstrait vérifiant $p_d\mathcal{G} > p_d\mathcal{C}\mathcal{G} + p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$.

Remarquons que M. Sierpinski a prouvé l'existence d'un espace (S) vérifiant $p_c\mathcal{G} \neq p_d\mathcal{G}$ [5]; d'autre part, il y a des espaces homéomorphes d'un continu plan et vérifiant $p_c\mathcal{G} < p_s\mathcal{C}\mathcal{G} > p_d\mathcal{G}$.

Corollaire. — *Pour tout espace* (V) *localement connexe et infini vérifiant* $p_c\mathcal{C}\mathcal{G} \leq p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$, *on a* $p_c\mathcal{G} = p_s\mathcal{G}$.

En combinant le corollaire précédent avec quelques théorèmes dûs à différents auteurs (voir ci-après), on obtient un théorème liant la condition $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leq \aleph_0$, nous l'appellerons *la condition de Souslin*, avec d'autres conditions intervenant dans la théorie des espaces abstraits; voici son énoncé :

Théorème II. — *Pour tout espace de M. Hausdorff, localement connexe, parfaitement compact et vérifiant* $p_c\mathcal{C}\mathcal{G} \leq p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$, *les conditions suivantes,* 1°, 2°, ..., 7°, *sont deux à deux équivalentes;* 1° $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leq \aleph_0$; 2° $p_c\mathcal{G} \leq \aleph_0$; 3° *Tout ensemble clairsemé est au plus dénombrable;* 4° *Tout ensemble infini non dénombrable contient un point de condensation;* 5° *Tout ensemble jouit de la propriété de Lindelöf* [6]; 6° *Tout* G (≡ ensemble ouvert) *est un* F_σ (≡ somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés) [7]; 7° F *étant un ensemble fermé quelconque, il y a une fonction réelle* $f(x)$ *continue partout* (dans l'espace) *et vérifiant* $\mathrm{F} \equiv \mathrm{E}[f(x) = 0]$ [8].

---

(3) Nous dirons qu'une famille ramifiée $\mathcal{F}$ d'ensembles est un *tableau ramifié d'ensembles décroissants* (*croissants*) si, pour tout $A \varepsilon \mathcal{F}$, la famille des $X \varepsilon \mathcal{F}$ vérifiant $X \supset A\ (X \subset A)$ est bien ordonnée par rapport à $\supset$ ($\subset$).

(4) Cf. la Note des *Comptes rendus,* 202, 1936, p. 185.

(5) Voir *Fund. Math.*, 2, 1921, p. 185.

(6) Pour les conditions 2°, 3°, 4° et 5°, voir le travail précité de M. Sierpinski (voir aussi K. Kunugui, *Fund. Math.*, 21, 1933, p. 244-249).

(7) Voir P. Alexandroff, P. Urysohn, *Proc. Acad. Amsterdam,* 14, 1929, p. 39.

(8) Voir N. Vedenissoff, *Fund. Math.*, 27, 1936, p. 234-238.

Pour tout espace ordonné connexe, les conditions 1°, 2°, ..., 7° *sont deux à deux équivalentes.*

Pour que tout espace ordonné connexe vérifiant la condition de Souslin $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leqq \aleph_0$ — *donc aussi les conditions* 2°, ..., 7° — *vérifie encore* $p_d\mathcal{G} \leqq \aleph_0$, *il faut et il suffit que la réponse au problème de Souslin soit affirmative.*

Condition C_0. — Désignons par C_0 la condition suivante (vérifiée ou non par un espace) :

Il y a une famille au plus dénombrable d'ensembles clairsemés (de l'espace) *dont la réunion est partout dense* (dans l'espace).

Je ne sais pas si C_0 équivaut à K_0; toutefois, il est légitime de remplacer K_0 par C_0 dans chacun des énoncés insérés dans la Note des *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1049; c'est une conséquence de l'égalité $p_c\mathcal{G} = \aleph_0$ vérifiée par tout espace ordonné connexe tel que $p_s\mathcal{G} = \aleph_0$.

Problème d'inertie. — $\mathcal{F}$ *étant une famille d'ensembles vérifiant* $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F}$, *a-t-on nécessairement* $p_c\mathcal{F}_\sigma = p_d\mathcal{F}_\sigma$ (9)?

La réponse affirmative au problème précédent en entraîne une au problème de Souslin. En effet, $\mathcal{F}$ désignant la famille des ensembles ouverts connexes d'un espace ordonné connexe quelconque vérifiant $p_s\mathcal{G} = \aleph_0$, on a, d'une part, $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F} = \aleph_0$, $p_c\mathcal{G} = \aleph_0$, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}_\sigma$, et, de l'autre, la relation $p_d\mathcal{G} = \aleph_0$ entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin.

Je remarque que la réponse affirmative au problème d'inertie entraîne l'égalité $p_c B = p_d B$ pour chaque classe B de M. Borel d'ensembles de nombres réels (remarquons que la relation $2\aleph_0 = \aleph_1$ entraîne $p_c B = p_d B$).

Ajoutons que, $\mathcal{F}$ désignant la famille des ensembles formés de nombres réels, MM. Lusin, Sierpinski et Hausdorff ont fait récemment de profondes recherches relatives aux nombres $p_c\mathcal{F}_\sigma$ et $p_d\mathcal{F}_\sigma$ (10). Alors que, d'après un théorème fondamental dû à Baire, on a $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F} = \aleph_0$, tout ce qu'on sait des nombres $p_c\mathcal{F}_\sigma$, $p_d\mathcal{F}_\sigma$, c'est que chacun d'eux est $> \aleph_0$.

---

(9) $\mathcal{F}_\sigma$ désigne la famille des ensembles $\sum_{n<\omega} A_n$, $(A_n \in \mathcal{F})$.

(10) Voir par exemple N. Lusin, *Suites stationnaires*, Paris, 1935, et W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, Varsovie, 1934, p. 118.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la théorie générale des fonctions polyharmoniques.* Note de M. **I. Privaloff**, présentée par M. Émile Borel.

Les résultats de cette Note se basent sur une définition nouvelle de fonction polyharmonique. D'abord nous donnons une définition nouvelle du paramètre différentiel polyharmonique. Cette définition est une généralisation de la définition ordinaire. Nous arrivons à cette définition par les considérations suivantes :

Soit $u(\mathcal{P}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une fonction uniforme dans un certain domaine ouvert G d'espace à p dimensions et sommable dans tout domaine intérieur à G. En désignant par $\omega(\mathcal{P}; h)$ le domaine d'une sphère de rayon h, ayant son centre au point $\mathcal{P}$, nous considérons l'expression

$$\Delta_h u(\mathcal{P}) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{\omega(\mathcal{P};h)} u(\mathcal{M})\, d\omega - u(\mathcal{P}),$$

où l'intégration s'étend sur le domaine $\omega(\mathcal{P}; h)$ limité par la surface de cette sphère.

En répétant l'opération Δ_h, n fois, nous trouvons l'expression $\Delta_h^n u(\mathcal{P})$, déterminée aux points du domaine $\mathcal{D}_{nh} \subset \mathcal{D}$. Les expressions

$$\underline{\Delta}^{\star n} u(\mathcal{P}) = \varliminf_{h \to 0} \left[\Delta_h^n u(\mathcal{P}) : \frac{h^{2n}}{2^n (p+2)^n} \right],$$

$$\overline{\Delta}^{\star n} u(\mathcal{P}) = \varlimsup_{h \to 0} \left[\Delta_h^n u(\mathcal{P}) : \frac{h^{2n}}{2^n (p+2)^n} \right]$$

seront dits paramètres polyharmoniques généralisés inférieur respectivement supérieur de la fonction $u(\mathcal{P})$ au point $\mathcal{P}$.

Nous dirons que la fonction $u(\mathcal{P})$ a un paramètre polyharmonique généralisé $\Delta^{\star n} u(\mathcal{P})$ en un point $\mathcal{P}$, si $\underline{\Delta}^{\star n}$ et $\overline{\Delta}^{\star n}$ coïncident et, par définition, nous posons dans ce cas

$$\Delta^{\star n} u(\mathcal{P}) = \lim_{h \to 0} \left[\Delta_h^n u(\mathcal{P}) : \frac{h^{2n}}{2^n (p+2)^n} \right].$$

Pour justifier cette définition nous avons démontré le théorème suivant :

Si la fonction $u(\mathcal{P})$ a toutes dérivées partielles continues d'ordre $2n$ dans le domaine G, elle possède dans ce domaine le paramètre polyharmonique généralisé d'ordre n, égal au paramètre polyharmonique d'ordre n ordinaire.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction*

$u(\mathcal{P})$, sommable à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$, soit polyharmonique d'ordre n dans ce domaine est la suivante :

Quel que soit un domaine G′, $\overline{G'} \subset G$, pour tous points $\mathcal{P}$ de ce domaine, l'expression

$$(a) \qquad \Delta_h u(\mathcal{P}) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{\omega(\mathcal{P};\, h)} u(\mathcal{M})\, d\omega - u(\mathcal{P})$$

représente une fonction polyharmoniqne d'ordre $n - 1$, h étant un nombre positif quelconque suffisamment petit.

Maintenant nous donnerons certaines applications des définitions précédentes à la théorie générale des fonctions polyharmoniques.

Théorème I. — *Si une suite de fonctions $\{u_k(\mathcal{P})\}$, polyharmoniques d'ordre n dans un domaine G, converge uniformément à l'intérieur de G, alors la fonction limite $u(\mathcal{P})$ sera polyharmonique d'ordre n dans G.*

Théorème II. — *Si une suite de fonctions $\{u_k(\mathcal{P})\}$, polyharmoniques d'ordre n dans un domaine G converge, uniformément à l'intérieur de G, vers une fonction limite $u(\mathcal{P})$ alors la suite dérivée quelconque $\{D\, u_k(\mathcal{P})\}$ sera aussi converger, uniformément à l'intérieur de G, vers la dérivée $D\, u(\mathcal{P})$ correspondante.*

Théorème III. — *Si une famille de fonctions $\{u(\mathcal{P})\}$, polyharmoniques d'ordre n dans un domaine G est bornée à l'intérieur de G, alors cette famille sera compacte à l'intérieur de G.*

Théorème IV. — *Si une fonction, polyharmonique dans tout l'espace, est bornée, alors cette fonction sera une constante.*

Théorème V. — *Si une suite de fonctions $\{u_k(\mathcal{P})\}$, polyharmoniques d'ordre n dans un domaine G, est bornée à l'intérieur de G et converge dans un certain domaine g, $\overline{g} \subset G$, alors cette suite converge uniformément à l'intérieur de G vers une fonction polyharmonique d'ordre n.*

Considérons la classe K_n de toutes fonctions, vérifiant les conditions suivantes :

1° Les fonctions de K_n sont polyharmoniques d'ordre n dans un domaine G;

2° Pour chaque fonction u de K_n on a

$$\Delta^s u \geqq 0 \qquad (s < n,\ \text{impaire}),$$
$$\Delta^s u \leqq 0 \qquad (s < n,\ \text{paire}).$$

Théorème I. — *Si une famille E de K_n est bornée supérieurement à l'intérieur de G, alors cette famille sera normale à l'intérieur de G.*

Théorème II. — *Si une fonction de K_n est bornée supérieurement dans tout l'espace, alors cette fonction sera une constante.*

Théorème III. — *Si une suite de fonctions, appartenant à K_n, est bornée supérieurement à l'intérieur de G et converge dans un certain domaine g, $\bar{g} \subset G$, alors cette suite converge uniformément à l'intérieur de G vers une fonction limite de K_n.*

Théorème IV. — *Si une suite de fonctions, appartenant à K_n est décroissante, alors la fonction limite de cette suite appartient à K_n, ou identiquement égale à $-\infty$. La convergence de cette suite sera uniforme à l'intérieur de G.*

HYDRAULIQUE. — *Recherches sur les moulinets hydrométriques.* Note [1] de MM. **Léopold Escande** et **Georges Sabathé**, transmise par M. Charles Camichel.

Dans la présente Note, nous allons passer en revue divers résultats obtenus dans la suite des recherches [2] que nous avons effectuées sur les moulinets hydrométriques.

I. On sait que l'un des procédés de tarage des moulinets par déplacement de l'appareil en eau calme utilise la rotation d'un manège à axe vertical. Dans ces conditions, le mouvement du moulinet n'est assimilable à une translation que d'une manière approximative, l'approximation étant d'autant plus exacte que le diamètre du manège est plus grand.

Nous avons voulu nous rendre compte des erreurs inhérentes à ce procédé, dans le cas d'un manège de diamètre relativement faible, entraînant le moulinet dans un bassin de grandes dimensions et de profondeur notable.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 1, dans laquelle on a $\varepsilon = (V_M - V)/V$, V_M étant la vitesse du moulinet fixé au manège et V la vitesse du moulinet, dans le tarage par translation, pour une même vitesse de rotation de l'hélice. R étant le rayon en mètres de la circonférence décrite par le moulinet, on voit que l'erreur commise dans le tarage au manège, toujours par excès, et augmentant à mesure que R diminue, est loin d'être négligeable, pour les valeurs de R mises en jeu.

II. Dans les mesures de débit, on est souvent amené, lorsqu'il existe dans

(1) *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 922.

(2) Séance du 25 janvier 1937.

ces régions de l'écoulement un gradient de vitesse élevé, à placer les appareils de mesure très près des parois d'un canal d'amenée ou d'une conduite forcée. Pour nous rendre compte de l'importance des erreurs susceptibles

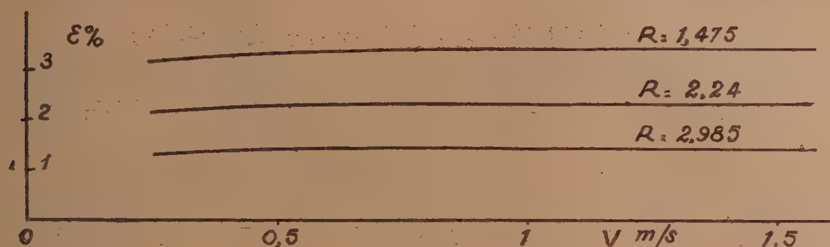


Fig. 1.

d'être introduites de ce fait, nous avons étudié les indications fournies par un moulinet taré par translation dans notre canal d'essai en suivant une trajectoire très voisine de l'une des parois. La figure 2 montre les résultats

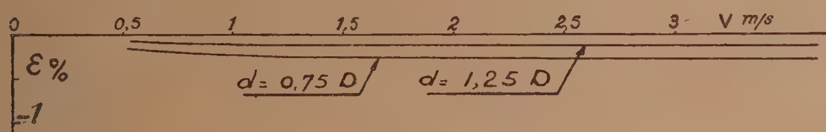


Fig. 2.

obtenus : les distances d de l'axe du moulinet à la paroi sont exprimées en fonction du diamètre D de l'appareil; l'erreur $\varepsilon = (V_p - V)/V$ (la vitesse de translation du moulinet étant V_p près de la paroi, et V en milieu infini,

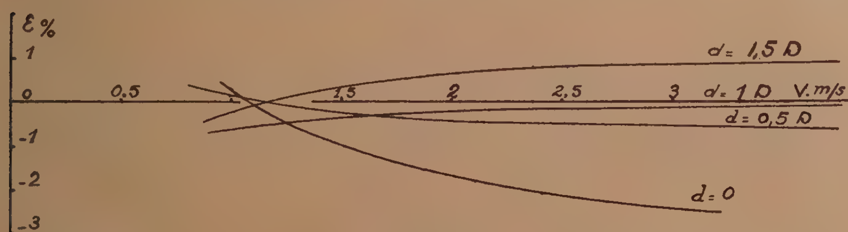


Fig. 3.

pour un même nombre de tours/seconde) est toujours très faible. Il ne semble donc pas que cet élément soit susceptible d'introduire une erreur appréciable dans les déterminations de débit.

III. Une question analogue se pose pour des moulinets placés au voisinage immédiat d'une surface libre.

La figure 3 montre les résultats obtenus dans ce cas par une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée au deuxième paragraphe. Les distances *d* sont comptées de l'axe du moulinet au plan de la surface libre ; l'erreur ε est donnée par la formule $\varepsilon = (V_s - V)/V$, dans laquelle V_s est la vitesse à laquelle on entraîne le moulinet au voisinage de la surface libre, et V sa vitesse d'entraînement dans le tarage en milieu infini, pour un même nombre de tours/seconde de l'hélice. On voit que l'erreur change de signe suivant la profondeur d'immersion de l'appareil.

Les résultats précédents ont été obtenus avec un moulinet Ott, type Arkansas, n° 5225. Nous avons obtenu des résultats analogues avec un moulinet Richard G. M. n° 69.

THÉORIE DE LA RELATIVITÉ. — *La théorie unitaire des champs proposée par M. Vranceanu.* Note (1) de M. **Kentaro Yano**, présentée par M. Élie Cartan.

M. Vranceanu (2) a proposé d'interpréter les espaces considérés par MM. Kaluza (3), Klein (4), Einstein et Mayer (5) pour établir une théorie unitaire des champs, gravitationnel et électromagnétique, comme une hypersurface V_5^4 non holonome (6) dans un espace de Riemann V_5.

Il considère l'espace-temps comme une hypersurface V_5^4 définie par $ds^5 = 0$ dans un espace de Riemann dont la métrique est donnée par la formule

$$d\sigma^2 = G_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = -(ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2 + (ds^4)^2 + (ds^5)^2$$
$$(\lambda, \mu, \ldots = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Mais M. Vranceanu emploie implicitement la condition que tous les coefficients des formes de Pfaff $ds^\alpha (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3, 4, 5)$ et par suite de la forme quadratique ne contiennent pas la variable x^5 (condition

---

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) G. Vranceanu, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 2056; *C. R. des Séances de l'Acad. des Sc. de Roumanie*, 1, 1936, p. 8.

(3) I. Kaluza, *Sitzungsberichte preuss. Akad. Wiss.*, 1921, p. 966.

(4) O. Klein, *Zeitschrift für Physik*, 37, 1926, p. 895 et 46, 1931, p. 188.

(5) A. Einstein et W. Mayer, *Sitzungsberichte preuss. Akad. Wiss.*, 1931, p. 541.

(6) G. Vranceanu, *Les espaces non holonomes* (*Mémorial des Sci. Math.*, 76, 1936).

cylindrique), celle que les formes de Pfaff $ds^a (a, b, \ldots = 1, 2, 3, 4)$ ne contiennent pas la différentielle dx^5 et enfin celle que ds^5 est de la forme $\varphi_i dx^i + dx^5$ c'est-à-dire $G_{55} = 1$. Dans cette Note, je voudrais préciser les conditions posées implicitement par M. Vranceanu.

Considérons d'abord un espace de Riemann V_5 dans lequel le carré de la distance entre deux points infiniment voisins est donné par

$$d\sigma^2 = G_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu. \tag{1}$$

Nous supposons que cet espace admette un groupe de transformations infinitésimales défini par

$$x^{\lambda *} = x^\lambda + \xi^\lambda \partial t, \tag{2}$$

c'est-à-dire nous supposons que la transformation infinitésimale (2) ne change pas la métrique (1).

Pour que l'équation (2) définisse un groupe de transformations, il faut et il suffit que le vecteur ξ^λ satisfasse aux équations de Killing [7],

$$\xi^\lambda \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + G_{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} + G_{\nu\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} = 0. \tag{3}$$

Cela étant, choisissons un système de coordonnées dans lequel ξ^λ a des composantes $\xi^\lambda = \delta^\lambda_5 (= 1$ ou 0 suivant que $\lambda = 5$ ou $\lambda \neq 5)$. Or, en substituant $\xi^\lambda = \delta^\lambda_5$ dans (3), nous obtenons $\partial G_{\lambda\mu} / \partial x^5 = 0$, d'où on conclut que les coefficients $G_{\lambda\mu}$ ne contiennent pas la variable x^5 dans ce système de coordonnées. De plus, imaginons que la transformation infinitésimale $x^{\lambda *} = x^\lambda + \delta^\lambda_5 \partial t$ déplace tous les points d'une même distance. Mais le carré de la longueur du vecteur infinitésimal $\delta^\lambda_5 \partial t$ est donnée par $G_{55} (\partial t)^2$. Donc G_{55} doit être une constante. Par conséquent, il existe des systèmes de coordonnées dans lesquels tous les $G_{\lambda\mu}$ sont indépendants de la variable x^5 et $G_{55} = 1$.

Pour rester dans le système de coordonnées de cette sorte, nous ne considérons dans la suite que les transformations de coordonnées de la forme

$$\overline{x}^5 = x^5 + f(x^i), \quad x^i = \overline{x}^i (x^j) \quad (i, j, \ldots, = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Cela dit, définissons une hypersurface non holonome V^4_5 par $\xi_\lambda dx^\lambda = 0$ qui n'est pas complètement intégrable; cette équation s'écrit

$$\varphi_i dx^i + dx^5 = 0 \qquad (G_{i5} = \varphi_i, \ G_{55} = 1), \tag{5}$$

---

(7) W. Killing, *Journal für reine und angew. Math.* (*Crelle*), 109, 1892, p. 121.

où φ_i est un vecteur à quatre composantes, parce que G_{ij}, G_{i5} et G_{55} se transforment comme tenseur, vecteur et scalaire respectivement dans un espace à quatre dimensions par rapport à la transformation de coordonnées (4). Mais φ_i ne se détermine qu'à un vecteur gradient près, parce que, pendant la transformation $x'^5 = x^5 + f(x^i)$, φ_i se transforme en $\varphi_i + \partial f / \partial x^i$; ce fait autorise à représenter par φ_i le potentiel-vecteur électromagnétique.

Nous avons ainsi les matrices des composantes des cinq vecteurs contrevariants unitaires et orthogonaux entre eux p^λ_α, $p^\lambda_5 = \xi^\lambda (= \delta^\lambda_5)$ et des cinq vecteurs q^α_λ réciproques aux p^λ_α, c'est-à-dire satisfaisant aux $p^\lambda_\alpha q^\alpha_\mu = \delta^\lambda_\mu$,

$$(6) \quad \left\| \begin{array}{ccccc} p^1_1 & p^1_2 & p^1_3 & p^1_4 & 0 \\ p^2_1 & p^2_2 & p^2_3 & p^2_4 & 0 \\ p^3_1 & p^3_2 & p^3_3 & p^3_4 & 0 \\ p^4_1 & p^4_2 & p^4_3 & p^4_4 & 0 \\ -\varphi_i p^i_1 & -\varphi_i p^i_2 & -\varphi_i p^i_3 & -\varphi_i p^i_4 & 1 \end{array} \right\|; \qquad \left\| \begin{array}{ccccc} q^1_1 & q^1_2 & q^1_3 & q^1_4 & 0 \\ q^2_1 & q^2_2 & q^2_3 & q^2_4 & 0 \\ q^3_1 & q^3_2 & q^3_3 & q^3_4 & 0 \\ q^4_1 & q^4_2 & q^4_3 & q^4_4 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 1 \end{array} \right\|.$$

où

$$p^i_a q^a_j = \delta^i_j, \qquad p^i_a q^b_i = \delta^b_a.$$

En vertu des vecteurs q^α_λ, on peut écrire (1) sous la forme

$$d\sigma^2 = G_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = -(ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2 + (ds^4)^2 + (ds^5)^2$$

où

$$ds^a = q^a_i\, dx^i, \qquad ds^5 = \varphi_i\, dx^i + dx^5.$$

Nous avons ainsi obtenu une décomposition de la forme quadratique (1)

$$(7) \qquad d\sigma^2 = G_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = g_{ij}\, dx^i\, dx^j + (\varphi_i\, dx^i + dx^5)^2,$$

où g_{ij} et φ_i ne sont fonctions que des variables x^1, x^2, x^3 et x^4 et représentent les champs, gravitationnel et électromagnétique, respectivement.

De l'équation (7), on a

$$G_{ij} = g_{ij} + \varphi_i \varphi_j, \qquad G_{5i} = \varphi_i \qquad \text{et} \qquad G_{55} = 1,$$

formules utiles pour calculer les symboles de Christoffel dans V_5.

Je terminerai cette Note en remarquant que ce que je viens d'exposer ici peut s'appliquer à la théorie que M. Hoffmann [8] a développée en partant des cas considérés par MM. Kaluza, Klein, Einstein et Mayer.

([8]) B. Hoffmann, *The Quaterly Journal of Mathematics*, 7, 1936, p. 20 et 32.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur les novæ et les naines blanches.* Note (1) de M. **Emile Sevin**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Les acquisitions récentes de la science conduisent à penser que, chaque électron étant venu à se combiner avec un proton, l'intérieur des naines blanches peut être composé uniquement de neutrons. Nous allons appliquer cette manière de voir à l'étude du compagnon de Sirius : nous désignerons par des lettres ordinaires les grandeurs relatives à cet astre, et par des lettres primées les grandeurs correspondantes applicables au Soleil.

L'observation fournit trois éléments d'appréciation. En représentant la masse par M, la luminosité par L et la température effective par T_e, on a ainsi approximativement : $M/M' = 0{,}80$, $L/L' = 1/360$, $T_e/T'_e = 4/3$. La relation de Sir A. Eddington, entre la masse et la luminosité, fait intervenir une constante C, le poids moléculaire moyen μ et un certain paramètre auxiliaire β; écrivons cette relation, ainsi que la formule qui lie β au rapport des masses (2) :

$$L = CM^{\frac{7}{5}}(1-\beta)^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{4}{5}}T_e^{\frac{4}{5}}, \qquad 1-\beta = 0{,}00309\left(\frac{M}{M'}\right)^2\mu^4\beta^4.$$

On en tire

$$L = CM^{\frac{7}{5}}(0{,}00309)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{M}{M'}\right)^3\mu^{\frac{34}{5}}\beta^6 T_e^{\frac{4}{5}},$$

et l'on obtient pour le rapport des luminosités

$$\frac{L}{L'} = \left(\frac{M}{M'}\right)^{\frac{22}{5}}\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{\frac{34}{5}}\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)^6\left(\frac{T_e}{T'_e}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

C'est ici que se présente une importante particularité : alors que, pour la matière ionisée du Soleil, μ' est égal à 2,11, μ ne vaut que l'unité pour les neutrons du compagnon; c'est ce qui va entraîner l'accord avec les données résultant de l'observation. Tenant compte des valeurs de L/L' et de T_e/T'_e rappelées ci-dessus, du nombre calculé par Sir A. Eddington pour β', soit 0,9501, et de ce que β, obtenu par approximations succes-

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) Voir A. S. Eddington, *Month. Not.*, 84, 1924, p. 308; *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge 1926; M. C. Bialobrzeski, *La Thermodynamique des Étoiles*, Paris, 1931.

sives, vaut 0,9983

$$\frac{M}{M'} = \left[\frac{2,11^{\frac{34}{5}}}{360} \left(\frac{0,9501}{0,9983} \right)^6 \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{4}{5}} \right]^{\frac{5}{22}} = 0,74.$$

Ainsi la relation masse-luminosité est valable pour le compagnon de Sirius, alors qu'on avait pensé qu'elle ne lui était aucunement applicable.

Calculons le rapport T_c/T'_c des températures centrales. Pour cela, appliquons tout d'abord la loi de Stefan; R et R′ étant les rayons et σ la constante qui intervient,

$$\frac{L}{L'} = \frac{4\pi R^2 \sigma T_e^4}{4\pi R'^2 \sigma T_e'^4} = \frac{R^2}{R'^2} \frac{T_e^4}{T_e'^4}.$$

Puis recourons à l'équation qui caractérise l'équilibre radiatif; en désignant respectivement par G et par $\mathcal{K}$ la constante de gravitation et la constante des gaz,

$$\frac{T_c}{T'_c} = \frac{0,856 G \mu \beta M / \mathcal{K} R}{0,856 G \mu' \beta' M' / \mathcal{K} R'} = \frac{\mu}{\mu'} \frac{\beta}{\beta'} \frac{M}{M'} \frac{R'}{R}.$$

D'où

$$\frac{T_c}{T'_c} = \frac{\mu}{\mu'} \frac{\beta}{\beta'} \frac{M}{M'} \left(\frac{T_e}{T'_e} \right)^2 \left(\frac{L'}{L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2,11} \frac{0,9983}{0,9501} 0,74 \left(\frac{4}{3} \right)^2 360^{\frac{1}{2}} = 12,4.$$

Or la température centrale du Soleil, calculée par Sir A. Eddington, étant de 39 500 000°, on trouve pour celle du compagnon :

$$39\,500\,000° \times 12,4 = 490\,000\,000°.$$

Mais les naines blanches ne constitueraient-elles pas une série, analogue à la série principale ([3]), caractérisée par une diffusion de l'énergie interne grâce au spin des neutrons ? S'il en est ainsi, de par sa grande masse le compagnon de Sirius doit se trouver vers la tête de cette série, et l'exemple des étoiles de la série principale nous apprend qu'il faut alors s'attendre à ce que la température, en rapport avec la composante fondamentale du rayonnement, vaille environ les 3/4 de la température calculée ci-dessus, soit

$$490\,000\,000° \times 3/4 = 367\,000\,000°.$$

Reportons-nous maintenant à la formule qui, dans le problème des deux

---

([3]) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 230.

corps, définit la masse $M_0/\sqrt{1-V^2/c^2}$, dont l'action est équivalente à l'action combinée de l'électron et du proton

$$\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{M_0}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0}+\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{m'_0}.$$

Dans cette formule, les termes du second membre représentent respectivement les inverses des masses transversales de l'électron et du proton, et l'on sait que le neutron correspond au cas limite où la vitesse V, qui est égale à $v+v'$, atteint la vitesse même de la lumière c ([4]). Or

$$\left[\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{M_0}\right]_{V=c}=\frac{0,1024}{m_0}+\frac{0,99999}{m'_0}=\frac{0,1029}{m_0};$$

il s'ensuit que le spin du neutron est en rapport avec une masse $m_0/0,1029$ et, par conséquent, que la température associée à la composante fondamentale de son spectre de diffusion est de $33000000°/0,1029=321000000°$. L'accord est tout à fait satisfaisant si l'on songe à l'incertitude qui règne sur les valeurs réelles à attribuer à L/L' et à T_e/T'_e.

Il apparaît donc bien que les naines blanches forment une série semblable à la série principale; après refroidissement elles seront constituées de « neutron » solide, analogue à de l'hydrogène solide mais de densité environ 6×10^{15} fois plus grande. On voit encore qu'entre les deux séries la continuité n'existe pas; le passage de l'une à l'autre ne peut s'effectuer que par un ou plusieurs cataclysmes, d'où le phénomène des *novæ*.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Étude photoélectrique de la couleur du ciel nocturne*. Note ([1]) de M. **Raymond Grandmontagne**, transmise par M. Charles Fabry.

On sait depuis longtemps que le ciel nocturne n'est pas bleu. Mais, tandis que les mesures photographiques ont conduit à des répartitions plus ou moins comparables à celle du rayonnement solaire direct ([2]), les mesures

---

([4]) Pour la théorie du neutron, voir *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1744 et 2070, et *Revue générale de l'Électricité*, **39**, 1936, p. 218.

([1]) Séance du 28 décembre 1936.

([2]) J. Dufay, *Bulletin de l'Observatoire de Lyon*, **10**, 1928, p. 111; Lord Rayleigh, *Proceedings of the Royal Society of London*, A, **99**, 1921, p. 11.

visuelles de Lord Rayleigh ont montré en 1924 que la *couleur* du ciel nocturne devait être comparée à celle d'une lampe demi-watt ([3]).

J'ai repris l'étude de cette question avec le photomètre enregistreur photoélectrique que j'ai construit pour l'étude des variations de la brillance du ciel nocturne ([4]). Une cellule photoélectrique au césium sur argent oxydé très bien isolée, exposée à la lumière du ciel nocturne prise dans un grand angle solidé, débite sur une résistance de 10^{12} ohms. Un électromètre Dolézalek mesure la différence de potentiel aux bornes de cette résistance. Devant la cellule défilent des filtres colorés qui partagent le spectre en trois régions :

Bleue : BG4, 1^{mm}. Transmission $3500 < \lambda < 5000$ Å ; maximum 0,80 à 4000 Å.
Verte : BG11, 8^{mm} ; VG1, 1^{mm}, OG1, 2^{mm}. Transmission $5300 < \lambda < 5650$ Å ; maximum 0,35 à 5475 Å.
Rouge : OG2, 4^{mm}. Transmission $5650 < \lambda$; maximum 0,99 pour $\lambda > 5800$ Å.

J'ai admis comme limite efficace de la sensibilité de la cellule vers le rouge 9000 Å.

La déviation de l'électromètre est enregistrée photographiquement sur un cylindre faisant un tour en 12 heures, situé à 1^{m}. Les déviations obtenues à travers les filtres sont de 5^{cm} en moyenne. Les tensions employées sur la cellule et sur l'électromètre n'ont jamais dépassé 20 volts ce qui indique que l'appareil pourrait avoir une sensibilité plus poussée s'il en était besoin. La cellule, les piles, l'électromètre et la résistance sont enfermés dans des compartiments métalliques réunis au sol. Un dispositif d'étalonnage comprend une lampe à filament de tungstène fonctionnant à résistance constante : la lampe est une des branches d'uu pont de de Weastone dont les autres branches ont des résistances en constantan ([5]). La température de couleur du filament mesurée au pyromètre est 2113° K $\pm 10^{\circ}$.

L'appareil a été utilisé au Pic du Midi de Bigorre en août 1936 puis à Saint-Genis-Laval (Observatoire de Lyon) pour comparer l'émission du ciel nocturne avec la lampe étalon. Aussi bien pour le ciel que pour la lampe, on doit recouvrir le filtre rouge d'un écran neutre de densité 1 pour amener les déviations à être du même ordre de grandeur dans le

---

([3]) Lord Rayleigh, *Proc. Royal Society of London*, A, **106**, 1924, p. 117.
([4]) R. Grandmontagne, *Compte rendu* 68e *Cong. des Sociétés Savantes*, 1935, p. 113.
([5]) G. Ribaud, *Traité de Pyrométrie*, Paris, 1931.

rouge et dans le bleu. Les résultats numériques montrent mieux encore l'importance du rouge. On ne peut certes pas assimiler le ciel nocturne à un corps noir, les distributions des énergies dans le spectre étant très différentes; mais on peut, à titre d'indication, calculer la température du corps noir, qui, à travers les filtres indiqués, donnerait les mêmes déviations. C'est ce que j'appelle température de couleur du ciel nocturne. J'ai admis comme longueurs d'onde d'efficacité maximum pour les filtres, respectivement : 4250 Å, 5475 Å, 7325 Å. La température de couleur trouvée est alors 2280° K environ. Le ciel nocturne apparaît ainsi notablement plus rouge que ne l'avaient signalé les auteurs antérieurs, la détermination visuelle de Lord Rayleigh étant celle qui se rapprocherait le plus de ce résultat (2800° K).

Les mêmes résultats peuvent s'exprimer différemment :

Les énergies moyennes reçues à travers les trois filtres sont dans le rapport

Bleu = 1, Vert = 1,74, Rouge = 83.

Pour un corps noir à 5500° K, pris comme source de lumière blanche, on a

Bleu = 1, Vert = 0,255, Rouge = 2,29

pour les mêmes bandes spectrales définies par les filtres employés.

Il en résulte que, si l'on fait le rapport : ciel nocturne/corps noir à 5500°, on trouve pour les trois bandes examinées :

Bleu = 1, Vert = 6,8, Rouge = 36.

Sous cette forme encore on voit l'importance considérable des radiations rouges et du proche infrarouge.

Récemment Léontovski (6) a examiné quelle serait la couleur de la lumière provenant de la multitude des nébuleuses extragalactiques lointaines qui tapissent le ciel dans l'hypothèse de Milne. La courbe trouvée donne un maximum vers 7500 Å. La lumière rouge observée dans le ciel est beaucoup plus considérable que la proportion attribuable aux nébuleuses extragalactiques. L'origine doit probablement en être recherchée dans la présence des nombreuses bandes d'émission signalées dans le

---

(6) M. Léontovski, *Nature*, 137, n° 3474, 1936, p. 904.

rouge [7] et dans le rouge extrême. [J. Dufay signale une bande intense vers 7600 Å et J. Cabannes a pu photographier des bandes d'émission jusque vers 8330 Å [8]].

ONDES HERTZIENNES. — *Propagation des signaux radioélectriques entre deux points éloignés l'un de l'autre.* Note [1] de M[me] **Irène Mihul** et de M. **Constantin Mihul**, présentée par M. Aimé Cotton.

M. Th. V. Ionescu et l'un d'entre nous ont établi une théorie de la propagation des ondes électriques courtes basée sur l'hypothèse que l'intervalle de temps τ entre deux chocs successifs d'un électron contre les molécules, dans un endroit donné de l'ionosphère, est le même pour tous les électrons [2]. A l'aide de cette hypothèse nous avons expliqué la majorité des phénomènes observés lors des sondages radioélectriques de l'ionosphère sous l'incidence normale et lors des radiocommunications, en admettant que τ croît progressivement avec l'altitude h et qu'il n'y a qu'une seule couche de gaz ionisé dans l'ionosphère.

Récemment W. Crone, K. Krüger, G. Goubau et I. Zenneck ont mesuré les intervalles de temps nécessaires aux signaux radioélectriques pour aller de Berlin à Munich ou inversement. Ils ont observé à cette occasion que souvent les ondes de même longueur suivent deux chemins distincts en mettant à les parcourir des intervalles de temps différents et que la diminution progressive de l'ionisation ionosphérique constatée le soir, fait décroître leur différence, de sorte que les signaux se rapprochent et finissent par se confondre. Les courbes caractéristiques se trouvent dans les figures 6, 11, et 12 de leur travail [3].

Nous avons repris les calculs en partant des hypothèses mentionnées plus haut. Nous avons choisi une variation de τ avec h exprimée par les relations

$$h = 80 + 0,03\,\omega\tau \quad \text{pour} \quad \omega\tau < 90^\circ$$

(7) L. A. Sommer, *Zeitschrift für Physik*, 77, 1932, p. 374; H. Garrigue, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1807.

(8) J. Dufay, *Étude de la lumière du fond du ciel nocturne*, Paris, 1934, p. 39; J. Cabannes, *Journal de Physique*, 5, 7e série, 1934, p. 601.

(1) Séance du 11 janvier 1937.

(2) *Journal de Phys.*, 6, 1935, p. 388.

(3) *Hochfrequenztechnik und Elektroakustik*, 48, 1936, p. 1.

et

$$h = 80{,}9801 + 0{,}00822\,(\omega\tau) + 0{,}000121\,(\omega\tau)^2 \qquad \text{pour} \quad \omega\tau > 90^\circ$$

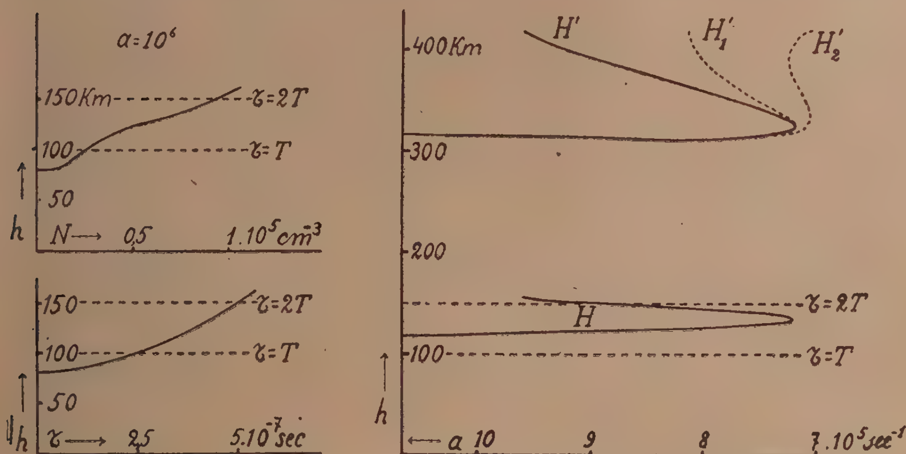
et les ionisations N données par la formule $Ne^2\lambda^2/\pi mc^2 = a.\tau.\varphi(\omega\tau)$ avec

$$\varphi(\omega\tau) = 1 - 0{,}00288\,(\omega\tau) + 0{,}000004\,(\omega\tau)^2 \qquad \text{pour} \quad \omega\tau < 600^\circ$$

et

$$\varphi(\omega\tau) = -1{,}88 + 0{,}00672\,(\omega\tau) - 0{,}000004\,(\omega\tau)^2 \qquad \text{pour} \quad \omega\tau > 600^\circ.$$

En attribuant au coefficient a les valeurs données par les abscisses de notre figure, nous avons calculé la constante délectrique, la conductibilité et



l'indice de réfraction du milieu pour $\lambda = 75^{\text{m}}$. Nous avons construit ensuite les trajectoires décrites par les ondes électriques entre deux points de la surface de la terre éloignés de 560^{km}. Nous avons trouvé que pour certaines ionisations les ondes peuvent suivre effectivement deux chemins distincts. Les flèches H de ces trajectoires sont données par les ordonnées de la courbe H. Pour comparer nos résultats avec les données d'expériences, nous avons calculé pour chaque trajectoire la grandeur qu'on mesure $H' = \int_0^H \frac{c}{v}\,dl$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, dl est l'élément de chemin parcouru par le signal et v est sa vitesse. Les valeurs de H, sont données en ordonnées de la courbe H'. Si le point où la fonction $\varphi(\omega\tau)$ change de forme est déplacé plus haut vers $\omega\tau > 600^\circ$, la branche supérieure de la courbe H' prend la forme H'_1, puis H'_2, ... En

regardant ces courbes on est frappé par leur ressemblance avec les courbes expérimentales.

En regardant les courbes expérimentales on voit que leurs branches supérieures sont au moins aussi intenses que les branches inférieures, quoique les portions des chemins suivies dans l'ionosphère par les signaux supérieurs soient de beaucoup plus importantes que pour les signaux inférieurs. L'explication est que les premiers suivent dans l'ionosphère un chemin relativement long dans la région où le quotient dn/dh est positif et petit, c'est-à-dire près du canal ionosphérique où le coefficient d'absorption est petit. En conséquence l'absorption de ces signaux est sensiblement réduite par rapport à celle subie par les signaux inférieurs, dont les trajectoires sont éloignées du canal. Pour les ionisations plus grandes les signaux supérieurs font un parcours long plus haut là où l'absorption croît vite avec l'altitude. Pour ce motif la branche, supérieure de la courbe, après avoir subsisté avec une grande intensité disparaît d'une façon brusque.

Les conditions d'ionisation choisies par nous sont telles que la réflexion des signaux a lieu entre les hauteurs où $\tau > T$ et $\tau < 2T$, ou un peu plus haut. Le phénomène pourtant est général. En particulier on devrait avoir des courbes des mêmes formes en enregistrant les signaux réfléchis plus bas là où $\tau < T$; bien entendu pour des ionisations plus grandes ou pour des ondes plus longues. Cependant à cause de la variation rapide de τ avec h, dans ce cas les deux signaux suivent des chemins peu différents et l'on ne peut pas espérer leur séparation tant que l'ionisation croissante ne nous déplace loin vers la partie gauche de notre courbe. Mais alors, quand l'ionisation est propre pour donner des signaux séparés, l'absorption des ondes dans la partie inférieure de l'ionosphère devient trop grande et le signal supérieur, qui fait tout son chemin ionosphérique dans cette zone, subit une absorption trop grande pour qu'on puisse l'observer. Ainsi on conçoit pourquoi les auteurs cités n'ont pas enregistré de telles courbes pour la réflexion sur la couche dite E.

Farmer et Ratcliffe, recevant à Edimbourg des signaux émis à Cambridge sur des ondes à longueur variable [4] constatent la présence de deux signaux dont la différence de temps diminue quand la longueur d'onde porteuse décroît : ils obtiennent des courbes analogues à celles de Zenneck et ses collaborateurs. L'explication de ces résultats à l'aide de

---

[4] *Proc. Phys. Soc.*, **46**, 1936, p. 839.

notre théorie est évidente d'après la signification du coefficient a. En effet la diminution de a peut être aussi bien produite par la diminution de λ que par celle de N.

SPECTROPHOTOMÉTRIE. — *Recherches spectrophotométriques sur la dilution et le mélange des vins.* Note de MM. **Augustin Boutaric**, **Louis Ferré** et de Mme **Madeleine Roy**.

Poursuivant nos recherches spectrophotométriques sur la couleur des vins [1], nous nous sommes proposé de rechercher s'il est vrai que, comme on l'admet assez généralement, la densité optique d'un vin dilué varie en raison inverse du degré de dilution, conformément à la loi de Beer.

1. La matière colorante des vins étant soluble dans l'alcool et insoluble dans l'eau, pour éviter toute précipitation de cette matière colorante, nous avons utilisé comme milieu diluant une solution alcoolique dont la teneur en alcool fût au moins égale à celle de tous les vins examinés et contenant 15 pour 100 en volume d'alcool.

Si la loi de Beer était applicable, la densité optique h devrait être proportionnelle à la concentration de la matière colorante de la solution considérée et par suite varier en raison inverse du volume v fourni après dilution par 1^{cm^3} de vin. On devrait donc avoir

$$h = \frac{A}{v}.$$

et le produit vh devrait garder une valeur constante au cours de la dilution. Le tableau suivant résume les mesures faites pour $\lambda = 540^{m\mu}$ sur la densité optique d'un certain nombre de vins pris sous des dilutions croissantes jusqu'à $v = 50$. La mesure de la densité optique pour les grandes dilutions a pu être faite avec précision grâce à l'emploi d'un jeu de cuves de diverses épaisseurs : 1, 5, 10 et 20cm, la densité optique étant toujours ramenée à une épaisseur d'un centimètre.

	vh pour					
Vin.	$v=1$.	$v=2$.	$v=5$.	$v=10$.	$v=20$.	$v=50$.
Oberlin	25,60	18,80	15,00	13,70	11,48	9,55
Teinturier	11,70	9,72	8,45	7,64	7,64	6,85
Gamay-Beaujolais	7,52	6,74	6,65	6,30	6,14	6,15
Côtes-du-Rhône	6,16	4,90	4,50	4,20	4,20	3,85
Hermitage	5,50	5,50	5,50	5,45	5,38	5,15
Pinot	3,47	3,48	3,35	3,32	3,26	3,10

(1) A. Boutaric, L. Ferré et M. Roy, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1142.

Les graphiques représentant les produits vh en fonction de v montrent que, pour tous les vins et pour toutes les longueurs d'onde, le produit vh diminue à mesure que v croît, la diminution étant d'autant plus rapide que le vin est plus foncé, c'est-à-dire que la valeur de h pour $v = 1$ est plus grande.

2. Nous avons retrouvé des résultats analogues en diluant le vin avec l'eau distillée; dans ce cas, à cause du léger dépôt de matière colorante qui peut se produire au bout d'un certain temps dans le vin dilué, il est indispensable d'effectuer les mesures de densité optique aussitôt après la dilution.

3. De même, en mélangeant un vin coloré (Oberlin) et un vin plus clair (Pinot), nous avons constaté, pour un certain nombre de longueurs d'onde, que la densité optique était toujours inférieure à celle calculée d'après la règle des mélanges. Voici les résultats obtenus pour $\lambda = 520^{m\mu}$

Proportion pour 100 de Pinot	0.	20.	40.	60.	80.	100.
h observé	25,30	15,95	12,75	9,15	6,30	3,34
h calculé	25,30	20,90	16,51	12,12	7,73	3,34

4. Enfin nous avons étudié comment se comporte une solution dans l'alcool à 50° de la matière colorante extraite des raisins frais du plan Oberlin lorsqu'on la dilue avec un mélange d'eau et d'alcool à 50 pour 100 d'alcool et, dans ce cas, nous avons constaté que la loi de Beer est pratiquement vérifiée.

Il semble naturel d'admettre que, dans la solution alcoolique ainsi envisagée, la matière colorante existe à l'état de simples molécules qui n'éprouvent pas de modifications importantes au cours de la dilution. Au contraire le vin doit être regardé comme une solution colloïdale dans laquelle la matière colorante se trouve à l'état de micelles complexes renfermant, en dehors de la matière colorante, un certain nombre d'autres constituants minéraux ou organiques des vins. Les résultats que nous avons obtenus s'interprètent simplement en admettant que l'équilibre entre les micelles et le liquide intermicellaire est troublé par la dilution et que les micelles se disloquent en fragments plus petits, ce qui entraîne une diminution de la densité optique plus rapide que ne l'indiquerait la loi de Beer.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur la possibilité de l'existence de niveaux énergétiques équidistants dans les noyaux des corps radioactifs.* Note [1] de MM. **Salomon Rosenblum** et **Marcel Guillot**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons attiré l'attention [2] sur certaines régularités qui existent dans la succession des niveaux nucléaires; en particulier, nous avons montré qu'à la précision des mesures près toutes les différences énergétiques pour les rayons α du ThC étaient multiples de 164 et 144 ekV.

Dernièrement M. Oppenheimer [3] a proposé des schémas nucléaires pour les corps issus du ThB.

Le schéma $\mathrm{ThC} \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightarrow}} \mathrm{ThC'}$ est en liaison avec les rayons α de *long parcours*. On a, d'après les mesures les plus récentes [4],

$$10745 - 8948 = 1797 \text{ ekV}, \qquad 9674 - 8948 = 726 \text{ ekV}.$$

On trouve

$$726\,(\alpha) > 144 \times 5 = 720 < 722\,(\gamma) \quad (^5), \qquad 1797\,(\alpha) > 11 \times 163 = 1793\,(\gamma).$$

Les nombres qui interviennent dans la transformation $\mathrm{ThC} \rightarrow \mathrm{ThC'}$, paraissent donc multiples de 144 et d'un nombre voisin de 164. M. Oppenheimer [2] admet, en plus, un niveau 1623 ekV, mais son attribution au ThC′ est aléatoire, car son existence n'est pas confirmée par un rayonnement α de long parcours. (Remarquons toutefois que 1623 est voisin de 10×163.)

Signalons en outre que tous les niveaux attribués par cet auteur à la transformation $\mathrm{ThC''} \rightarrow \mathrm{ThPb}$ sont assez bien représentés par une combinaison de 164 et 145 (voir le schéma). On a en effet

$$2620 \simeq 164 \times 16 = 2624 \text{ ekV}, \qquad 510 \simeq 145 \times 7/2 = 507{,}5 \text{ ekV},$$
$$2895 \simeq 145 \times 20 = 2900 \text{ »}, \qquad 582 \simeq 145 \times 4 = 580 \text{ »}.$$

---

(1) Séance du 28 janvier 1937.

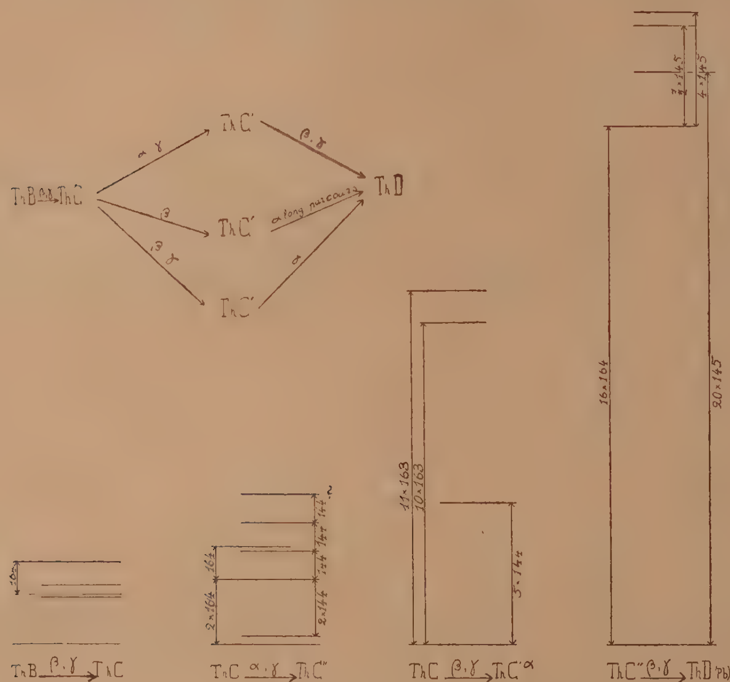
(2) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 943; **204**, 1937, p. 175.

(3) *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32**, 1936, p. 332.

(4) Lewis et Bowden, *Proc. Roy. Soc.*, A, **145**, 1934, p. 235.

(5) Surugue, *Thèse*, Paris, 1936, p. 55.

Comme il s'agit là de multiples assez élevés, il serait prématuré de considérer ces coïncidences comme certaines surtout dans le cas où le schéma



de niveaux n'est pas donné directement par l'expérience. Il nous semble toutefois intéressant de montrer que, même dans le cas des transformations β, on pourrait espérer trouver des principes simples pour la classification des radiations γ et que les mêmes nombres semblent intervenir pour les corps qui suivent le ThB dans la filiation radioactive. Remarquons enfin qu'on retrouve le nombre 164 comme différence dans la transformation du ThB en thorium C (voir le schéma).

CHIMIE PHYSIQUE. — *L'influence du groupe terminal sur le point de fusion des composés aliphatiques à chaîne normale.* Note [1] de MM. **P. Carré** et **H. Passedouet**, présentée par M. Georges Urbain.

On sait que les points de fusion des acides gras normaux, monobasiques et bibasiques, oscillent avec régularité, les points de fusion des acides à nombre impair d'atomes de carbone étant inférieurs aux points de fusion des acides voisins à nombre pair d'atomes de carbone.

Dans le cas des hydrocarbures aliphatiques normaux, et des alcools primaires normaux, de C_1 à C_9 l'alternance est beaucoup moins accentuée ou inexistante, et lorsqu'elle se présente ce sont les composés impairs qui ont le point de fusion le plus bas ainsi que pour les acides.

Pour les mercaptans normaux, $CH^3(CH^2)^n\text{-}CH^2SH$, de C_1 à C_9, l'alternance est inverse de la précédente, ce sont les mercaptans à nombre pair d'atomes de carbone qui ont un point de fusion inférieur à celui des mercaptans voisins à nombre impair d'atomes de carbone [2]. Il en est de même pour les premiers termes des acides alcoylsulfoniques $CH^3(CH^2)^n\text{-}SO^3H$, de C_1 à C_5 ce sont les acides à nombre pair d'atomes de carbone qui ont le point de fusion le plus bas, pour C_6 l'alternance ne se reproduit pas [3].

L'alternance du point de fusion des composés aliphatiques normaux dépend donc de la fonction terminale.

Nous avons recherché quelle serait à ce point de vue, l'influence de la fonction uréthane. A cet effet, nous avons préparé, par l'action de l'ammoniaque sur les chloroformiates d'alcoyle, et purifié, les uréthanes $CH^3(CH^2)^n\text{-}CH^2OCONH^2$, correspondant aux alcools primaires normaux de C_1 à C_{16} [4].

Les résultats sont représentés par la courbe ci-dessous, établie en portant en ordonnées les températures de fusion, et en abscisses les nombres d'atomes de carbone du radical alcoyle.

---

[1] Séance du 25 janvier 1937.

[2] Ellis et Reid, *J. Am. Chem. Soc.*, 54, 1932, p. 1674.

[3] Vivian et Reid, *J. Am. Chem. Soc.*, 57, 1935, p. 2559.

[4] Les premiers termes seulement de ces uréthanes avaient été préparés jusqu'à présent.

par les acides gras normaux. Entre C_4 et C_7 il n'y a plus d'alternance, celle-ci réapparaît pour C_8 entre C_7 et C_9 en restant de même sens que la précédente; cette particularité vers C_8 est en accord avec les particularités



déjà observées pour d'autres propriétés [5]. L'alternance disparaît à nouveau de C_8 à C_{12}, pour se reproduire entre C_{12} et C_{16}, mais cette nouvelle alternance est inverse de celle qui existe entre C_4 et C_5. On remarque aussi que les disparitions d'alternance se produisent au voisinage de C_5 et C_{10}, ce qui est en accord avec une observation de B. Lee [6] d'après laquelle un grand nombre de propriétés physico-chimiques changent nettement d'allure quand on passe des composés à 5, à 10 et à 15 atomes de carbone.

Ces résultats montrent que certaines propriétés physiques des composés aliphatiques à chaîne normale, à l'état solide, n'oscillent pas toujours avec régularité, mais que pour certaines fonctions terminales l'alternance peut disparaître et aussi se trouver inversée.

D'autre part les composés mentionnés ci-dessus peuvent se diviser en deux groupes :

1° les acides, les alcools et les hydrocarbures aliphatiques normaux.

---

(4) P. Carré, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 555 et 1767.

(5) B. Lee, *Trans. Farad. Soc.*, 23, 1927, p. 634.

L'alternance, bien nette pour les cinq premiers termes, est de même nature que celle constatée pour les mercaptans, et inverse de celle donnée pour lesquels les alternances des points de fusion correspondent à des minimums impairs;

2° les mercaptans, les acides sulfoniques et les uréthanes d'alcoyles normaux, pour lesquels les alternances des points de fusion sont inverses des précédentes, au moins pour les premiers termes, et correspondent à des minimums pairs.

Si l'on admet ([7]) que les températures de fusion des composés organiques à chaîne aliphatique normale sont en relation avec la polarité du carbone terminal qui porte la fonction, on voit que ces résultats paraissent en accord avec la règle pratique de l'écart électronique ([8]). En effet, l'élément ou le groupement lié au carbone terminal est plus lourd dans le deuxième groupe que dans le premier; il doit en résulter une variation de la polarité de ce carbone terminal qui détermine l'inversion de l'alternance.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influences des électrolytes sur l'hydratation de quelques complexes cobaltiques.* Note ([1]) de M. **Jules Brüll**, présentée par M. Georges Urbain.

Comme suite à notre étude sur l'hydratation de quelques complexes ([2]), il nous a semblé intéressant de rechercher l'influence sur cette réaction, soit de la nature de l'anion, soit de l'addition de sels ou d'acides à la solution.

a. Nous avons mesuré les vitesses d'hydratation des chlorure, bromure, iodure et azotate praseo, ainsi que celle des chlorure et bromure chloro-aquo. Les constantes de vitesses à 18° sont les suivantes :

([7]) F. Henrich, *Les théories de la chimie organique*, 1925, p. 135.
([8]) P. Carré, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 740.

([1]) Séance du 18 janvier 1936.
([2]) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1584.

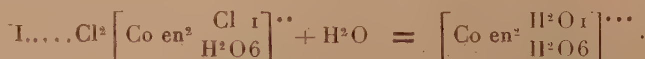
	Concentration en molécule-gramme.		
	0,001.	0,005.	0,01.
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{Cl\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet}$ (chlorure) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,02.10^{-3}$	$0,90.10^{-3}$	$0,70.10^{-3}$
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{Cl\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet}$ (bromure) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,08.10^{-3}$	$0,93.10^{-3}$	$0,81.10^{-3}$
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{Cl\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet}$ (iodure) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,12.10^{-3}$	$1,08.10^{-3}$	$0,97.10^{-3}$
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{Cl\,6}\end{matrix}\right]$ (azotate) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,11.10^{-3}$	–	–
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet}$ (chlorure) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{H^2O\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,38.10^{-3}$	–	–
$\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet}$ (bromure) $+ \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{H^2O\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}$	$1,46.10^{-3}$	–	–

La constante de vitesse dépend donc de la nature de l'anion.

b. L'influence du cation ou effet de sel neutre a été déjà signalée par Brœnsted [3]. Nous avons comparé l'action des bromures de différents métaux sur quelques réactions d'hydratation.

Voici un Tableau des constantes, mesurées à 18° pour une concentration de $0^{\mathrm{molg}},001$ du complexe et en présence de $0^{\mathrm{molg}},001$ d'électrolyte :

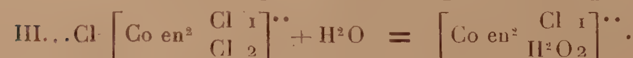
	Sans électrolyte.	Li Br.	Na Br.	K Br.	Rb Br.	Ba Br₂, Ca Br₂, Si Br₂.
I......	$1,28.10^{-3}$	$1,28.10^{-3}$	$1,28.10^{-3}$	$1,20.10^{-3}$	$1,21.10^{-3}$	$1,17.10^{-3}$
II.....	$1,38.10^{-3}$	$1,38.10^{-3}$	$1,38.10^{-3}$	$1,28.10^{-3}$	–	–
III....	$4,38.10^{-3}$	$4,32.10^{-3}$	–	$4,08.10^{-3}$	$4,00.10^{-3}$	–
IV....	$1,02.10^{-3}$	$1,02.10^{-3}$	$0,94.10^{-3}$	$0,83.10^{-3}$	$0,78.10^{-3}$	$0,73.10^{-3}$
			Na Cl.	K Cl.		
V.....	$6,80.10^{-3}$	–	$6,60.10^{-2}$	$6,30.10^{-3}$	–	–



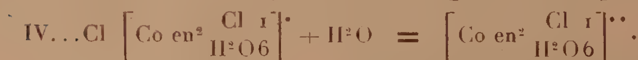
I.....$\mathrm{Cl^2}\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet} + \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{H^2O\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet\bullet}.$



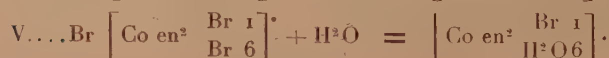
II....$\mathrm{Cl^3}\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet} + \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{H^2O\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet\bullet}.$



III...$\mathrm{Cl}\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{Cl\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet} + \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,2}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}.$



IV...$\mathrm{Cl}\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet} + \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Cl\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet\bullet}.$

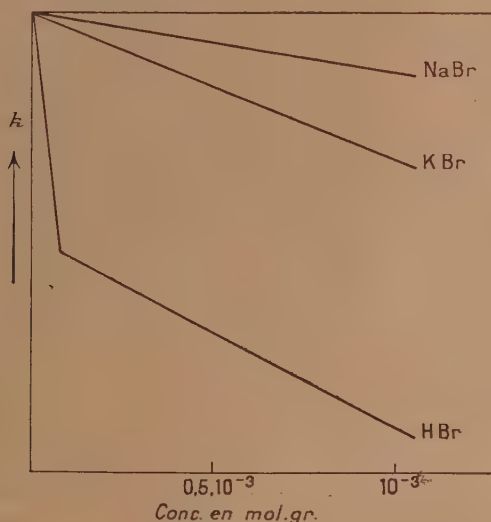


V....$\mathrm{Br}\left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Br\,1}\\ \mathrm{Br\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet} + \mathrm{H^2O} = \left[\mathrm{Co\,en^2}\begin{matrix}\mathrm{Br\,1}\\ \mathrm{H^2O\,6}\end{matrix}\right]^{\bullet}.$

(3) *Zeitschr. f. Physik. Chemie*, **102**, 1922, p. 169, et **115**, 1925, p. 337.

Les hydrines sont peu sensibles à l'influence du cation. Au contraire, la diminution de la constante de vitesse est particulièrement nette dans le cas du trans dichloro, elle augmente lorsque l'on passe du Na au K et au Rb.

En étudiant l'influence des cations métalliques en fonction de leur concentration, nous avons trouvé que l'abaissement de la constante en présence de cations se fait d'une façon linéaire (voir la figure).



Par contre, l'abaissement de la constante en présence de l'acide correspondant se fait brusquement (jusqu'à une concentration de 7,5.10$^{-5 molg}$ pour 10$^{-3 molg}$ du trans dichloro), mais se poursuit ensuite aussi d'une façon linéaire.

Donc l'ion hydrogène semble d'abord avoir une influence spécifique, qui se manisfeste par une forte diminution de l'hydratation; son action devient ensuite semblable à celle des autres cations.

Nous avons déjà signalé (*loc. cit.*) que la constante de vitesse d'hydratation des hydrines des sels complexes diminue avec le temps. Brœnsted [4], pour expliquer ce phènomène, a imaginé un mécanisme de réaction, qui n'est valable que pour les hydrines. Nous avons trouvé, que d'autres

---

([4]) *Zeitschr. f. physik. Chemie*, **122**, 1926, p. 383.

combinaisons qui ne contiennent pas d'eau de constitution comme [Co en² Cl2] Cl 1-2 et 1-6 et [Co en² Br²] Br 1-6 accusent une grande sensibilité à l'H·. Ce fait semble ne pas être en accord avec l'explication de Brœnsted.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Verres phosphorescents. Influence de la cristallisation* (¹). Note (²) de M. **Maurice Curie**, transmise par M. Jean Perrin.

Verre ordinaire. — Les essais ont porté sur un verre ordinaire présentant une assez forte fluorescence verte, pas de phosphorescence visible (excitation arc mercure), mais ensuite une légère thermoluminescence verte; par simple fusion et refroidissement, la thermoluminescence baisse encore.

Un échantillon de ce verre fut recuit pendant 4 jours à 800°. Il est alors nettement cristallisé : phosphorescence et thermoluminescence nettes, vertes. Dans un autre essai, pour améliorer la cristallisation, on incorpora dans le verre 1 pour 100 de CaF^2 par fusion à 1200°; puis on porta 4 jours à 800° : phosphorescence verte très améliorée, forte thermoluminescence verte. Ce verre phosphorescent, amené à fusion puis refroidi, est seulement fluorescent.

Borate de zinc $2B^2O^3$, $3ZnO$. — Les essais d'influence de la cristallisation ont été repris avec des luminogènes divers.

Mn 1 pour 1000 paraît être le luminogène le plus intéressant. Avant cristallisation, légère fluorescence rougeâtre, phosphorescence à peine perceptible. La chauffe de cristallisation (four électrique 1 heure à 800°) fournit des cristaux ayant une très belle phosphorescence très durable, de couleur jaune (spectre orangé jaune); l'intensité de la phosphorescence au bout d'une minute atteint les 2/10es de celle d'un très beau ZnS au cuivre de A. Guntz, le déclin de la phosphorescence se poursuit ensuite parallèlement (excitation par le rayonnement global de l'arc mercure, le borate s'excite fort mal par le début de l'ultraviolet). Le borate phosphorescent porté à fusion, puis refroidi (dans le même four, à 1000°) ne présente plus que la faible fluorescence rougeâtre initiale.

Pb 1 pour 100. Avant cristallisation : fluorescence (F) faible, pas de

(¹) *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 997.

(²) Séance du 25 janvier 1937.

phosphorescence (P). Après cristallisation : F très améliorée, P nette, blanchâtre (spectre très étalé).

Bi 1 pour 1000. Avant cristallisation : F faible, pas de P. Après cristallisation : F belle, blanchâtre (bande rouge verte et bande bleue-violette), P nette, belle thermoluminescence bleue.

Sm 1 pour 100. Avant cristallisation : belle F jaune rouge (spectre de bandes étroites), P très faible, thermoluminescence nette. Après cristallisation : P assez belle et belle thermoluminescence rougeâtre.

Ur 1 pour 100. Avant cristallisation : belle F jaunâtre (spectre s'étendant de l'orangé au violet, avec plusieurs maxima), pas de P. Après cristallisation : belle F, P douteuse. Ce luminogène est donc particulier, il s'agit probablement d'une fluorescence plus pure.

Schémas énergétiques de la phosphorescence. — Ces essais établissent avec une grande netteté l'influence de la cristallisation sur la durée de la luminescence. D'autre part, on retrouve avec le borate de zinc au manganèse un nouveau cas d'apparition de luminescence par cristallisation, fait dont on connaît plusieurs exemples : tungstates purs, borure d'azote à luminogène.

Un schéma de phosphorescence doit utiliser une seule variété de centres pour rendre compte d'émissions de durées très variables (3). Il doit aussi faire intervenir les niveaux énergétiques du réseau (4). De plus, étant donné l'influence de la cristallisation sur la durée de luminescence, il est possible que les bandes énergétiques de conductibilité du réseau jouent un rôle dans le mécanisme de cette durée. On peut, par exemple, envisager le glissement des électrons de phosphorescence dans ces bandes et leur fixation sur des niveaux d'hétérogénéités du réseau plus ou moins éloignés du centre, cette fixation correspondant à une sorte d'état méta-stable pour la luminescence.

Les subtances étudiées ici paraissent devoir se prêter à des mesures de photoconductibilité d'interprétation assez directe.

---

(3) MAURICE CURIE, *Thèse*, Paris, 1923, p. 36. Voir aussi F. SCHMIDT et W. ZIMMERMANN, *Ann. der Phys.*, 82, 1927, p. 191, et S. ROTHSCHILD, *Phys. Zeitschf.*, 21, 1936, p. 757.

(4) MAURICE CURIE, *Luminescence des corps solides* (Conférences-Rapports 1934); T. MUTO, *Sc. Pap. Inst. Phys. Chem. Research*, Tokyo, nos 613 et 614, décembre 1935 et janvier 1936.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Potentiel d'ionisation de l'oxyde de carbone.* Note [1] de MM. **Jean Savard**, **Marc de Hemptinne** et **Paul Capron**, transmise par M. Jean Perrin.

Poursuivant l'étude des potentiels d'ionisation des molécules, nous avons appliqué à l'oxyde de carbone la méthode précédemment décrite pour la molécule d'azote [2]. Si la détermination des potentiels critiques de cette dernière avait été aisée, il n'en est pas de même avec CO. En effet, les variations du courant électronique observé (en fonction du potentiel accélérateur) mettent en évidence une série de points critiques si nombreux et si voisins que la fidélité de l'appareil pourrait être mise en doute. Nous nous sommes demandé si de l'azote atomique encore occlus dans les plaques de cuivre ne troublait pas nos mesures. Mais leur répétition avec un nouvel appareil en tantale, ainsi que les résultats concordants de 59 expériences, nous ont convaincus de l'individualité et de l'exactitude de tous ces potentiels. Nous en donnons ci-dessous la liste, de 12,5 à 19 eV.

Ces potentiels sont, pour la plupart, des potentiels de résonance dus à la combinaison additive de deux termes spectraux.

L'accord entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées d'après les données spectrales est très satisfaisant, sauf pour le potentiel 13,2 que nous attribuons cependant à la résonance $a^3\Pi + a'^3\Sigma$ dont le potentiel calculé est 13,1 eV. Mais si l'on remarque que, pour l'état $a^3\Pi$, $r_e = 1,20$ Å, tandis que pour la molécule normale $r_e = 1,13$ Å, un écart de 0,1 eV est plausible. N'oublions pas que nous observons des résonances ou des ionisations verticales [3], et non des différences de niveaux minima.

L'observation de toutes ces résonances contrôle la valeur de notre technique ainsi que le calibrage de nos deux appareils, réalisé avec l'argon, mais rend singulièrement délicat le choix du potentiel d'ionisation. Remarquons cependant que les résonances calculées, les plus voisines de 13,5 sont 13,1 et 13,8 eV. 13,5 n'est donc pas un potentiel de résonance. D'autre part, les différences 16 — 13,5 soit 2,5, et 19,1 — 13,5 soit 5,6, sont exactement les différences des niveaux des états $^2\Pi$, $^2\Sigma_u^+$, $^2\Sigma_g^+$ de l'ion CO^+. Il est donc naturel de supposer que 13,5 représente le potentiel d'ionisation de la molécule normale.

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 2147.

(3) *Journal de Physique et le Radium*, 6, 1935, p. 499.

Pot. observés.	Signification.	Pot. calculés.	Pot. observés.	Signification.	Pot. calculés.
12,65	$K + d^3\Pi$	12,67	16,1	$K + C^1\Sigma$	16,13
13	$K + G^1\Pi$	12,99	16,2	$K + E^1\Sigma$	16,24
13,2	$a^3\Pi + a'^3\Sigma$	13,1	16,7	$a^3\Pi + b'$	16,70
13,5	$CO^{+}\,{}^2\Sigma_g^+$	ionisat.	16,9	$a^3\Pi + e$	16,94
13,9	$a^3\Pi + d^3\Pi$	13,86	17,1	$K + F^1\Pi$	17,09
14,2	$2.a'^3\Sigma$	14,25	17,3	$a^3\Pi + C^1\Sigma$	17,31
15	$a'^3\Sigma + d^3\Pi$	15,01	18,1	$a'^3\Sigma + e$	18,09
15,2	$K + B^3\Sigma$	15,13	18,7	$A^1\Pi + B^1\Sigma$	18,71
15,5	$K + B^1\Sigma$	15,51	18,9	$A^1\Pi + e$	18,95
15,75	$K + e$	15,76	19,1	$CO^{+}\,{}^2\Sigma_u^+$	ionisat.
16	$CO^{+}\,{}^2\Pi$	ionisat.			

La vérification de la valeur choisie pour le potentiel d'ionisation s'effectue en observant le courant ionique parvenant au collecteur, alors qu'un potentiel retardateur approprié arrête au contraire tous les électrons. Les ions apparaissent nettement à 13,5 eV ; jamais nous n'avons pu les mettre en évidence pour de plus faibles potentiels, bien que notre galvanomètre fût sensible à 10^{-11} ampère. S'élevant nettement à 13,5 eV, la courbe d'intensité du courant ionique passe par un maximum situé entre 19,9 et 14,1 eV. Ce maximum se déplace, suivant les conditions expérimentales, entre les valeurs précédentes. Nous pensons pouvoir raisonnablement l'attribuer aux résonances situées à 13,8, 13,9 et 14,2 eV, dont la mise en jeu doit diminuer le rendement de l'ionisation. Ce maximum est, en effet, d'autant plus marqué que la pression est plus forte et l'intensité de l'émission électronique plus faible. Peut-être ce maximum était-il observé au spectrographe à masse, ce qui expliquerait les résultats trop élevés des expérimentateurs américains [1] ?

Nous attribuons aux différentes résonances, situées entre 15,3 et 15,9 eV, le palier qui s'étend entre ces mêmes limites. A 15,9-16 eV, la courbe s'élève verticalement, ce qui confirme l'interprétation proposée pour le potentiel 16 : formation de l'ion $^2\Pi$. De courts paliers à 16,2 et 18,6 eV s'expliquent encore par les résonances correspondantes.

La formation de l'état $^2\Sigma_u^+$ est complètement masquée par des résonances (une est possible à 19, et trois le sont à 19,2 eV). Nous croyons trouver là une justification à notre préférence pour la méthode d'observation directe du courant électronique. Enfin, la résonance à 19,4 est si marquée (la

---

[1] J. T. Tate et W. Lozier, *Physical Review*, 39, 1932, p. 254.

résonance possible est quintuple) que la courbe passe par un nouveau maximum. Ce potentiel ne peut donc pas être choisi comme potentiel de formation des ions atomiques. Les valeurs proposées pour l'énergie de dissociation de la molécule inférieures ou égales à 8,2 eV doivent déjà être éliminées. Nous concluerons de cette étude que le potentiel d'ionisation de la molécule CO est 13,5 eV. D'après le calibrage à l'argon et les mesures des potentiels de résonance, l'erreur possible commise est de 0,05 eV.

Remarque. — Deux potentiels peu marqués ont été observés à 14,6 et 14,7 eV. Aucune résonance connue ne peut les expliquer. S'agit-il de combinaisons de résonances inconnues, ou d'un état d'activation inconnu de l'ion CO^{+}? Leur origine est probablement la même que celle des bandes observées par Henning ([5]) entre 113000 et 138000 cm^{-1}, qui correspondent à des niveaux supérieurs à celui du potentiel d'ionisation.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Les germani- et les zirconioxalates de quinine et de strychnine.* Note de M. **Arakel Tchakirian**, présentée par M. Georges Urbain.

Les germanioxalates de quinine et de strychnine. — Nous avons, avec M. J. Bardet ([1]), mis en évidence l'existence de l'acide germanioxalique, auquel nous avons attribué la formule $[Ge(C^2O^4)^3]H^2$. L'acide n'ayant pu être isolé, cette formule était simplement basée sur les propriétés physicochimiques de la solution oxalique de l'oxyde GeO^2, et sur le fait que, dans ces solutions, le rapport du poids du germanium à celui de l'acide oxalique est resté constamment voisin d'un tiers.

J'ai cherché à isoler quelques composés confirmant cette formule et j'ai préparé les sels de quinine et de strychnine de formules respectives $[Ge(C^2O^4)^3]$ Quinine H^2; $[Ge(C^2O^4)^3]$ 2 Strychnine H^2.

Ces sels sont solubles dans un excès d'acide oxalique.

Préparation du germanioxalate de quinine. — On mélange à froid la solution d'acide germanioxalique avec une solution concentrée d'oxalate de quinine. Le sel précipite immédiatement; on le sépare par filtration, on le sèche dans le vide, puis à l'étuve à 120° jusqu'à poids constant. Le

---

([5]) *Annalen der Physik*, **13**, 1932, p. 599.

([1]) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 914.

séchage dans le vide est indispensable, sinon le sel se décompose dans son eau de cristallisation.

Propriétés. — Le germanioxalate de quinine se présente sous forme d'une poudre blanche, très hygroscopique. La solubilité dans l'eau est, à la température ordinaire, environ 0,7 pour 100. A chaud, il s'hydrolyse avec dépôt de quinine. Les solutions sont fluorescentes.

Préparation du germanioxalate de strychnine. — On mélange à chaud la solution d'acide germanioxalique avec une solution bouillante d'oxalate de strychnine. La solution laisse déposer le sel par refroidissement. Après filtration, on sèche directement à l'étuve à 120° jusqu'à poids constant.

Propriétés. — Le germanioxalate de strychnine est une poudre blanche, microcristalline et très hygroscopique. La solubilité dans l'eau est environ 0,5 pour 100. Les solutions résistent à l'hydrolyse, même à l'ébullition, ce qui permet de purifier le sel par cristallisation.

Les zirconioxalates de quinine et de strychnine. — Les zirconioxalates de potassium et d'ammonium ont été étudiés successivement par Paykull (2), Venable et Baskerville (3), Maudl (4), Rosenheim et Franck (5), Pfeiffer (6).

Mlle J. Boulanger (7) a étudié récemment par la méthode des solubilités à température constante, les hydrates des combinaisons moléculaires oxalate de zirconyle, acide oxalique et oxalates alcalins.

J'ai pu constater que la solution d'oxyde ZrO^2 dans l'acide oxalique se conduisait vis-à-vis des oxalates de quinine et de strychnine, de façon analogue à la solution d'oxyde GeO^2 dans l'acide oxalique vis-à-vis de ces mêmes alcaloïdes. Il y a là encore formation de sels que j'ai pu isoler et auxquels l'analyse a permis d'attribuer les formules suivantes; $[Zr(C^2O^4)^4]$ 2 quinine $2H^2$; $[Zr(C^2O^4)^4]$ 4 strychnine $2H^2$. Formules analogues à celles des composés correspondants de germanium, avec cette différence que le zirconium a la coordinence huit, alors que le germanium a la coordinence six.

Préparation du zirconioxalate de quinine. — On verse à froid la solution d'oxalate de quinine dans une solution d'acide zirconioxalique. Le sel précipité, isolé par filtration est séché à 120°.

---

(2) *Bull. Soc. Chim.*, **20**, 1873, p. 65.
(3) *J. Am. Chem. Soc.*, **19**, 1896, p. 12.
(4) *Z. anorg. Chem.*, **37**, 1903, p. 252.
(5) *Bericht. D. Chem. Ges.*, **38**, 1905, p. 812; **40**, 1907, p. 803.
(6) *Z. anorg. Chem.*, **105**, 1919, p. 29.
(7) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 2156; **203**, 1936, p. 87 et 1257.

Dans les mêmes conditions l'aluminium, le fer et le niobium ne précipitent pas, ce qui doit permettre une séparation du zirconium de ces métaux.

Propriétés. — Le zirconioxalate de quinine est une poudre blanche, très hygroscopique, soluble à environ 0,5 pour 100 dans l'eau, résistant à l'hydrolyse même à l'ébullition, ce qui en permet la purification par cristallisation.

Préparation du zirconioxalate de strychnine. — La solution d'acide zirconioxalique est traitée à chaud par une solution bouillante d'oxalate de strychnine. Le sel déposé par refroidissement et séparé par filtration, est séché à l'étuve à 120° jusqu'à poids constant.

Propriétés. — Le zirconioxalate de strychnine est une poudre blanche, cristalline, très hygroscopique. La solubilité dans l'eau est de l'ordre de 0,2 pour 100. Les solutions résistent à l'hydrolyse.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action des organomagnésiens sur les trialcoylacétophénonoximes.* Note de M. **Joseph Hoch**, présentée par M. Marcel Delépine.

J'ai décrit [1] l'action des organomagnésiens sur l'oxime de la propiophénone et exposé les raisons qui m'ont conduit à faire cette étude. Je décrirai ici l'action de C^2H^5MgBr, C^6H^5MgBr et *p*-$CH^3C^6H^4MgBr$ sur l'oxime de la *n*-butyldimétylacétophénone (I) P. F. = 138° ainsi que celles de CH^3MgI et C^6H^5MgBr sur l'oxime de la benzyldiméthylacétophénone (II) P. F. = 191°.

Ces oximes ne réagissent avec les organomagnésiens que si on les chauffe pendant 8 heures environ au sein du xylème bouillant (135°) avec 5^{mol} de ces réactifs. Par suite d'une résinification importante les rendements en bases sont toujours faibles.

Au cours de ces expériences, j'ai constaté que, quel que soit le magnésien mis en œuvre, le produit principal de la condensation est toujours l'imine correspondante à l'oxime. L'oxime I a donné ainsi avec tous les magnésiens l'imine de la *n*-butyldiméthylacétophénone



$$(C^4H^9)(CH^3)^2CC(C^6H^5){=}NH \qquad (\text{P. E.} = 140^\circ \text{ sous } 17^{mm}),$$

---

[1] Hoch, *Comptes rendus*, **197**, 1934, p. 1865.

l'oxime II l'imine de la benzyldiméthylacétophénone

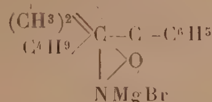

$$(C^6H^5CH^2)(CH^3)^2CC(C^6H^5)=NH \quad (P.\ E. = 192\text{-}194^\circ \text{ sous } 18^{mm}).$$

Ces imines ont été caractérisées par leur transformation 1° en cétone au moyen de ClH à chaud; 2° en l'oxime primitive par action de NH^2OH; 3° par leurs phénylurées (P. F. = 131-132° respectivement 156°). Ces derniers produits ont été identifiés par synthèse [Action de C^6H^5MgBr sur $(C^4H^9)(CH^3)^2CCN$ et sur $(C^6H^5CH^2)(CH^3)^2CCN$, puis de $C^6H^5N{=}C{=}O$ sur les imines ainsi obtenues].

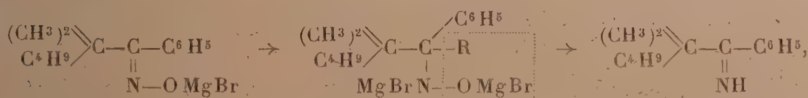
Les magnésiens des radicaux alcoylés ne donnent pas lieu à des réactions secondaires; par contre, C^6H^5MgBr fournit encore avec les oximes I et II l'imine de la benzophénone $(C^6H^5)^2C=NH$ [phénylurée $(C^6H^5)^2C=NCONHC^6H^5$ P. F. = 166°], et de $p.CH^3C^6H^4MgBr$ avec l'oxime I, l'imine de la *p*-tolylphénylcétone $CH^3C^6H^4C(C^6H^5)=NH$, P. E. = 176° sous 13^{mm} (phénylurée P. F. = 167°).

Ces imines ont été caractérisées et identifiées exactement de la même façon que celles qui ont été décrites plus haut. La synthèse a été réalisée par action de C^6H^5MgBr sur C^6H^5CN et respectivement $p.CH^3C^6H^4CN$.

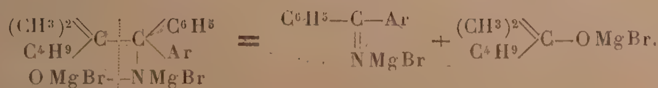
La formation de ces imines s'explique si l'on admet la fixation de 1^{mol} de magnésien sur l'oxime, donnant une hydroxylamine N. disubstituée qui instable dans les conditions de la réaction, se scinderait de préférence suivant le schéma.



ou



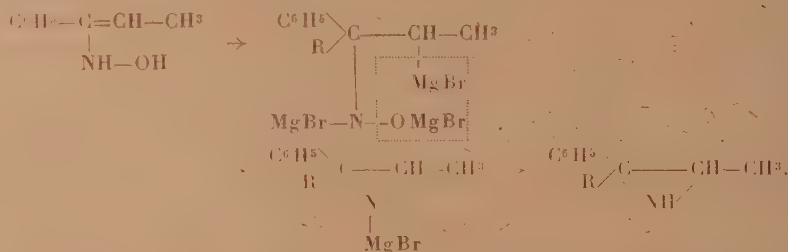
Quand R est un radical arylé la scission peut se faire aussi suivant le schéma



Si cette hypothèse est juste on devrait retrouver, parmi les produits de la réaction, un alcool tertiaire ou son produit de déshydratation. J'ai, en effet trouvé, dans l'action de C^6H^5MgBr sur l'oxime I, quelques gouttes

de produits neutres, passant entre 86-92°, qui décolorent le brome, mais je n'ai pu en faire aucun dérivé solide pour l'identifier d'une façon certaine.

Avant d'exposer les conclusions tirées de ces travaux, je rappellerai que l'étude de la teneur en hydrogène mobile de la propiophénonoxime, par la méthode de Zerewitinoff, a montré que ce corps dégage $1^{mol},5$ de méthane par molécule. Ce fait semble prouver qu'elle réagit avec les organomagnésiens sous la forme d'hydroxylamine non saturée, ce qui explique beaucoup mieux la formation des composés iminoéthyléniques que le mécanisme donné dans la Note précédente [2].



Cette interprétation est parfaitement en accord avec les rendements obtenus en composés iminoéthyléniques.

En résumé, l'action des organomagnésiens sur les cétoximes a montré : 1° que l'oxime de la propiophénone doit réagir sous sa forme d'hydroxylamine non saturée, forme que les trialcoylacétophénonoximes ne peuvent pas prendre; 2° l'étude des produits formés ne permet pas de déterminer si ces dernières oximes réagissent sous la forme $>C=N-OH$ ou sous la forme $>C\overset{O}{—}NH$.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Recherches sur les colorants de Pechmann. Procédé de synthèse permettant de former des colorants à substituants inégaux.* Note de M. **Paul Chovin**, présentée par M. Marcel Delépine.

En 1882, v. Pechmann effectuait la synthèse d'un corps coloré, appelé improprement depuis colorants de Pechmann, et dont la constitution,

---

([2]) Hoch, *Comptes rendus*, 197, 1934, p. 1866.

malgré les nombreux travaux dont elle a été l'objet, doit être considérée à l'heure actuelle comme incomplètement connue.

Ayant eu fortuitement, lors d'un travail en collaboration avec Ch. Dufraisse, l'occasion de préparer ce corps par une méthode nouvelle, j'ai entrepris une étude sur cette sorte de matières colorées en vue d'essayer d'en préciser les conditions de formation et d'apporter quelques renseignements susceptibles d'éclairer la structure de leur groupe chromophore.

Le colorant, tel que l'a obtenu v. Pechmann, résulte de l'union de deux molécules d'un acide aroylacrylique, par exemple l'acide benzoylacrylique, avec perte de deux molécules d'eau :



$$2\,C^6H^5-CO-CH=CH-CO^2H \xrightarrow{-2H^2O} C^{20}H^{12}O^4.$$

La seule notion bien établie concernant la constitution est que le groupe aryle de l'acide de départ conserve son individualité dans le composé final. L'aryle ne fait pas partie du groupe chromophore actif et n'entre dans la constitution du colorant qu'en tant que substituant monovalent. Par suite, on doit représenter les colorants de Pechmann par la formule générale : $Ar-(C^8H^2O^4)-Ar$, dans laquelle l'ensemble $-(C^8H^2O^4)-$ constitue le chromophore, que, pour simplifier, on indiquera désormais par le symbole $-(X)-$.

La question qui se pose immédiatement, pour le chromophore $-(X)-$, est de savoir quel est son degré de symétrie. Celui-ci a été regardé par les auteurs comme correspondant à l'existence soit d'un plan, soit d'un centre, mais sans preuve directe : il n'a même été explicité aucune raison formelle d'exclure les structures sans symétrie.

Un renseignement très précis serait fourni par la synthèse de deux colorants à substituants inégaux $Ar_1-(X)-Ar_2$ et $Ar_2-(X)-Ar_1$, étant sous-entendu, naturellement, que le chromophore $-(X)-$ est présenté avec la même orientation dans les deux formules. L'enchaînement aura obligatoirement une structure symétrique si les deux colorants sont identiques, en d'autres termes, si la molécule reste inchangée après permutation des deux substituants.

Or les méthodes actuelles de synthèse reviennent à des doublements de molécules identiques, ce qui introduit nécessairement des aryles égaux. Sans doute pourrait-on imaginer d'opérer sur un mélange de deux acides aroylacryliques différents; toutefois en plus des deux isomères éventuellement attendus $Ar_1-(X)-Ar_2$ et $Ar_2-(X)-Ar_1$, il se ferait simultanément les deux colorants ordinaires à substituants égaux $Ar_1-(X)-Ar_1$

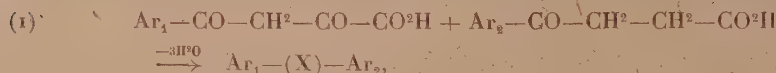
et $Ar_2-(X)-Ar_2$, soit en tout quatre colorants. Les difficultés de séparations de tels mélanges seraient pratiquement insurmontables. Mais, dût-on y parvenir, que l'on n'aurait pas le droit de tirer argument de l'absence d'un deuxième isomère contre son existence théorique, car ce corps pourrait tout simplement ne pas s'être formé en proportions isolables.

De là l'idée de rechercher une méthode de synthèse permettant l'obtention normale et à volonté de l'un ou de l'autre des deux colorants à substituants dissemblables $Ar_1-(X)-Ar_2$ ou $Ar_2-(X)-Ar_1$.

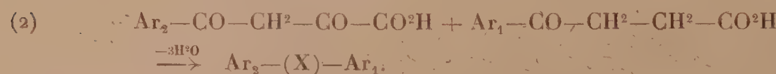
Les anciennes méthodes se rattachent à trois types de condensation : l'un, tel celui de v. Pechmann, comporte une simple élimination d'eau, donc aucun changement du degré d'oxydation; un autre, tel celui de Kugel, part de corps plus hydrogénés que le colorant, donc doit procéder par oxydation; le troisième, enfin, celui de Dufraisse et Chovin, réduit une matière trop oxydée.

Je me suis demandé si l'on ne parviendrait pas à construire le colorant en opposant deux molécules, non plus identiques comme jusqu'ici, mais se distinguant par leur degré d'oxydation, l'une étant plus oxydée, l'autre plus hydrogénée que le colorant à former. On pourrait ainsi, en variant les réactifs, choisir à volonté les groupes aryles à introduire et, par là, s'ils sont différents, créer les colorants cherchés à substituants inégaux, et, au contraire, s'ils sont identiques, retrouver les colorants ordinaires à substituants égaux.

Le procédé que j'ai réalisé consiste à condenser un acide aroylpyruvique sur un acide aroylpropionique, selon le couple de réactions suivantes :



$$(1)\quad Ar_1-CO-CH^2-CO-CO^2H + Ar_2-CO-CH^2-CH^2-CO^2H \xrightarrow{-3H^2O} Ar_1-(X)-Ar_2,$$



$$(2)\quad Ar_2-CO-CH^2-CO-CO^2H + Ar_1-CO-CH^2-CH^2-CO^2H \xrightarrow{-3H^2O} Ar_2-(X)-Ar_1.$$

A titre de contrôle, je l'ai appliqué d'abord à la synthèse du colorant de Pechmann simple, en faisant $Ar_1- = Ar_2- = C^6H^5-$.

Cette vérification faite, j'ai abordé la préparation de corps à substituants dissemblables. Le premier, un colorant monométhylé, a été obtenu en faisant $Ar_1- = C^6H^5-$ et $Ar_2- = CH^3-C^6H^4-$, ce qui conduit, d'après l'équation (1), à faire réagir l'acide benzoylpyruvique sur l'acide β-(*p*-toluyl)-propionique.

C'est un corps rouge foncé, fondant instantanément à 307°. Les bandes

de son spectre d'absorption s'intercalent entre celles du colorant de Pechmann simple, non méthylé (Ar_1—=Ar_2—=C^6H^5—, F.=317°), et celles de son homologue, le corps diméthylé (Ar_1—=Ar_2—=CH^3—C^6H^4—, F.=357°).

Le point le plus important était de savoir si la réaction, effectuée dans l'ordre renversé des substituants, d'après l'équation (3), aboutirait à la formation du même produit ou à celle d'un isomère. En fait, l'acide *p*-toluylpyruvique réagissant sur l'acide β-benzoylpropionique fournit un colorant monométhylé, qui s'est révélé identique au premier. Il n'y a donc pas d'isomérie par permutation des substituants, ce qui prouve que leurs places sont équivalentes.

En résumé, la synthèse dont le principe vient d'être décrit permet de préparer une catégorie de composés dont on ne connaissait encore aucun représentant; en outre, elle apporte le premier argument expérimental positif en faveur d'une structure symétrique du chromophore —($C^8H^2O^4$)— des colorants de Pechmann.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action du nickel de Raney sur quelques aldoximes.* Note de M. **Raymond Paul**, présentée par M. Robert Lespieau.

De nombreux auteurs ont étudié l'hydrogénation catalytique des oximes à l'aide du nickel, réduit, ou précipité sur un support inerte. Bien que les conditions opératoires aient été fort différentes les produits obtenus ont toujours été ceux qu'on pouvait normalement attendre, c'est-à-dire des imines ([1]), ou des mélanges d'amines primaires, secondaires et tertiaires ([2]).

L'emploi du nickel de Raney ([3]), qui, *a priori*, devait donner des résultats analogues, m'a permis d'hydrogéner très rapidement les cétoximes vers 80° en présence d'une petite quantité d'alcool. Par contre les quatre aldoximes que j'ai étudiées (éthanaldoxime, benzaldoxime, furfuraldoxime et cinnamylaldoxime) n'ont pu être hydrogénées qu'à froid et en solutions

---

([1]) Mignonac, *Bull. Soc. Chim.*, 4e série, 27, 1920, p. 387.

([2]) Mailhe, *Bull. Soc. Chim.*, 3e série, 33, 1905, p. 963; Maihle et Murat, *ibid.*, 4e série, 9, 1911, p. 464; Wassiljew, *Ber. Dstch. Ch. Ges.*, 60, 1927, p. 1122; Winans et Adkins, *Am. Chem. Soc.*, 55, 1933, p. 2051.

([3]) Le catalyseur utilisé avait été préparé en suivant les indications données dans une Note précédente (R. Paul et G. Hilly, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 3, 1936, p. 2330).

très étendues, le catalyseur les transposant en amides, même à des températures peu élevées.

L'éthanaldoxime s'échauffe fortement au contact du nickel de Raney. Dans un essai portant sur 10g d'oxime et 3g de nickel, la température s'est élevée de 60°; l'échauffement est nettement localisé sur le catalyseur. Après une heure de contact à 100°, on a recueilli par distillation 8g,8 d'acétamide (Éb. 221°-222°). Rendement 88 pour 100.

La benzaldoxime en solution éthérée bouillante donne avec le nickel de Raney 65 pour 100 de benzamide (P. F. 126°). Si l'on chauffe l'oxime (3g,3) sans solvant avec une petite quantité de catalyseur (0g,5) une vive réaction se déclenche vers 160°; lorsqu'elle est calmée on isole par cristallisation dans le benzène bouillant 2g,5 de benzamide. Le rendement est alors de 75 pour 100.

La furfuraldoxime réagit encore plus facilement. A 100° on obtient 88 pour 100 de pyromucamide (P. F. 142°); mais la réaction tend à s'emballer et la température peut monter au delà de 150° si l'on ne refroidit pas énergiquement.

La cinnamylaldoxime a également donné dans des conditions analogues l'amide de l'acide cinnamique (P. F. 147°). Toutefois le rendement est moindre que dans les trois exemples précédents.

Le rôle du catalyseur est assez difficile à interpréter, mais il semble bien que, dans tous les cas, il se forme une combinaison oxime-nickel. L'acétaldoxime en particulier, maintenue quelques jours à la température ordinaire avec du nickel de Raney, donne un liquide rouge sang; après centrifugation prolongée, ce liquide a fourni par rectification sous basse pression de l'oxime inaltérée, de l'acétamide, ainsi qu'un résidu appréciable contenant du nickel, de l'aluminium et des traces de fer. Si, au contraire, la solution rouge est maintenue une heure à 100° avant la distillation, la quantité d'acétamide formée est considérablement augmentée.

La facilité avec laquelle il provoque la transposition



$$R-CH=N-OH \rightarrow R-CO-NH^2$$

place le nickel de Raney bien à part dans la série des catalyseurs au nickel. Il se révèle ici bien supérieur au cuivre réduit [4] et à la terre acide japonaise [5] qui, s'ils provoquent aussi la transposition des aldoximes en

[4] YAMAGUCHI, *Memoirs Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ.* (A), 9, 1925, p. 33; *Bull. Chem. Soc. Jap.*, 1, 1926, p. 35 et 54.

[5] INOUE, *Bull. Chem. Soc. Jap.*, 1, 1926, p. 177.

amides, entraînent la déshydratation de la majeure partie de celle-ci en nitriles et dans les cas les plus favorables ne donnent pas un rendement supérieur à 50 pour 100.

La seule réaction accessoire que j'ai pu déceler est la formation de petites quantités d'aldéhydes et d'ammoniac, provenant vraisemblablement de la réaction d'Angéli [8],



$$3R{-}CH{=}N{-}OH \rightarrow 3R{-}CHO + N^2 + NH^3.$$

Quant aux cétoximes et aux nitrosophénols, dont je poursuis actuellement l'étude, ils semblent se comporter d'une façon très différente.

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Estérification du copal du Congo dans l'industrie des vernis gras.* Note de M. **Georges Dantlo.**

L'ester glycérique du copal Congo est connu. Son point de fusion n'est pas satisfaisant et, en règle générale trop décomposé, le produit possède une mauvaise odeur particulière.

Le copal pyrogéné de façon habituelle polymérise lors de l'estérification avec la glycérine. Coffignier et Terrisse ont proposé des procédés à l'huile de copal redistillée, huile de résine, naphtaline. Ellis et après Gardner et Holdt chauffent le copal pyrogéné encore des heures à hautes températures.

Dans la pyrogénation il y a transformation d'acides bibasiques en acides monobasiques et Hellinckx met en garde contre la décarboxylation trop poussée, transformation des oxyacides et cracking. Kienle d'autre part donne l'exemple de l'anhydride phtalique bibasique qui donne avec le glycol un produit colloïdal, avec la glycérine, où trois liaisons primaires entrent en jeu, une résine durcissable. Cette théorie est également valable pour le Congo.

Le copal du Congo pyrogéné ne polymérise pas avec l'alcool benzylique (indiqué par Coffignier) mais fournit un ester du P. F. 69°, avec le glycol le P. F. est de 94°. Dans les deux cas, pour avoir un indice d'acide au-dessous de 20°, il faut opérer 40 minutes à 295°C. ce qui industriellement présente d'énormes difficultés en raison du bas point d'ébullition de ces alcools. A des températures de 200-260° l'estérification reste incomplète.

---

(8) Angéli et Alessandri, *Ac. Lincei*, 22, 1913, p. 735.

Pour garder intactes les propriétés du copal pyrogéné, ne pas le décomposer par un long chauffage, avoir une solubilité suffisante tout en profitant l'action durcissante de la polymérisation, il faut utiliser un solvant intermédiaire approprié et procéder d'après mes essais comme suit :

100 parties de copal Congo pyrogénées (exemple : perte 21 pour 100, P. F. 93°, indice d'acidité 76,5, soluble à l'huile de lin à 300°C., rapport résine : huile = 1 : 1) sont portées avec 20 parties d'Albertol III L (ou autre résine semblable) à 295°C., 6 parties de glycérine sont introduites et l'on maintient la température pendant 40 minutes. Le produit résultant est un ester d'odeur normale, indice d'acide au-dessous de 20, P. F. 105°, se comporte comme le copal pyrogéné en ce qui concerne la solubilité à l'huile. Le même procédé s'applique également aux autres gommes, manille dure, etc.

En utilisant dans le même procédé, parties égales du pyrocopal et de l'Albertol (P.F. 93), l'ester obtenu est plus facilement soluble, déjà dans le Withe Spirit, son P.F. = 94.

Si dans le premier exemple la colophane modifiée à l'aide d'un produit formo-phénolique (Albertol III L) est remplacée par l'ester glycérique de la colophane, la polymérisation est évitée également, P.F. seulement 87.

On peut encore estérifier la glycérine préalablement partiellement avec la colophane (9 colophane et 3 glycérine 3 heures minimum à 295°C, réaction *violente*) et estérifier 100 copal pyrogéné avec 36 parties de ce produit pour obtenir après une heure à 295° un ester relativement clair, P.F. 87.

P.F. = pour le point de fusion la résine a été réduite en poudre, introduite dans un tube capillaire et le premier changement d'aspect a été noté.

GÉOLOGIE. — *Découverte du Nummulitique dans l'île de Shadwan (Mer Rouge).* Note [1] de M. **Jean Cuvillier**, présentée par M. Charles Jacob.

Parmi les nombreux matériaux rapportés par Nasri Shoukri Eff. de la récente croisière en Mer Rouge du *Manbahith* sous les auspices de l'Université égyptienne et dont l'étude d'ensemble doit faire l'objet d'un

(1) Séance du 25 janvier 1937.

travail ultérieur, j'ai eu la surprise de rencontrer des éléments d'un niveau à Foraminifères appartenant incontestablement au Nummulitique. Il s'agit essentiellement d'un calcaire rouge-brunâtre ferrugineux et passablement siliceux, provenant de la portion sud-ouest de l'île de Shadwan (Western Bay), dont l'affleurement est distant d'environ 1km,5 du rivage.

Les seuls fossiles macrospiquement déterminables dans les échantillons de roche étudiés sont des *Operculina canalifera* d'Arch.; l'examen en lames minces m'a permis d'y identifier, en outre, les organismes suivants : des Nummulites à grande loge initiale, de petite taille, assez globuleuses, qui pourraient se rapporter à *N. atacicus* Leym. avec d'autres formes montrant des individus à microsphère, plus grandes et le plus souvent fragmentées; des débris de réseau d'Orthophragmines, de mauvaises sections d'une Alvéoline rappelant les caractères de *A. oblonga* d'Orb., des Textulaires, des Milioles et des fragments de tests d'Échinides et de Mollusques.

Bien que les renseignements tirés des coupes minces ne soient pas très précis, l'association des grands Foraminifères précités me conduit à situer vers la base de l'Éocène moyen le niveau dont ils sont issus ; la position des Alvéolines dans le Nummulitique égyptien est, en effet, assez constante ; elles apparaissent surtout dans les sédiments que surmontent les bancs à *Nummilites gizehensis* Forsk, où il n'est pas rare de trouver aussi des Orbitolites ; par ailleurs, la présence d'exemplaires parfaitement conservés d'*Operculina canalifera* m'incline à attribuer au Lutétien inférieur la couche à Foraminifères rencontrée, en place, semble-t-il, par Nasri Shoukri Eff. dans l'île de Shadwan.

Cette découverte, outre qu'elle vient démontrer l'existence d'un développement autrefois plus considérable du Nummulitique à l'est de la chaîne arabique, apporte des arguments nouveaux en faveur de la théorie de Ball [2] pour la formation par érosion, plutôt que par effondrement, du golfe de Suez à l'entrée duquel se présente l'îlot de Shadwan où la superposition du Miocène à l'Éocène indique une succession analogue à celle que l'on peut observer à proximité du rivage africain de la Mer Rouge et à la même altitude.

---

(2) J. Bail, *The Gulf of Suez, Geol. Mag.* (V), 8, 1, Dec. 1911, p. 1-10, London.

GÉOLOGIE. — *Métamorphisme et plissement.*
Note de M. **René Perrin**, présentée par M. Louis de Launay.

Marcel Bertrand et Termier ont remarqué la liaison entre séries cristallophylliennes et chaînes de montagne. La théorie des nappes appliquée spécialement aux Alpes, accompagnée d'une conception de la mobilité des continents, héritée de Wegener, a conduit à la prédominance d'une conception purement mécanique de l'orogenèse. Le métamorphisme du mésozoïque des Alpes est pour les uns régional et antérieur à la formation de la chaîne (École française), pour d'autres pur dynamométamorphisme, sans apport de substances (École suisse), les granites tertiaires en étant une conséquence extrême (Lugeon). Cependant certains auteurs pensaient que des intrusions de magmas ont dû être guidées par des plissements (Argand-Demay).

Dans des Notes précédentes, j'ai exposé la théorie du métamorphisme par diffusions et réactions à l'état solide, puis tiré la conséquence logique : ces échanges s'accompagnant de changements de volume, le métamorphisme est générateur de plissement. Développant ces idées, j'ai été amené à écrire :

1° Des discordances sur cristallin ne prouvent pas toujours l'antériorité d'âge de celui-ci en cet état;

2° Nombre des terrains cristallins des Alpes, spécialement les noyaux pennins, sont de formation alpine en leur état actuel;

3° Le métamorphisme a joué un rôle dans le plissement alpin sans qu'on puisse préciser encore l'importance de ce rôle.

Demay, qui dès 1926, montra dans les Cévennes l'alternance des phénomènes magmatiques et déformations orogéniques et précisa en 1933 l'importance d'injections magmatiques syntectoniques, émet récemment l'hypothèse que les grandes séries gneissiques de métamorphisme régional sont dues au jeu alternant ou simultané de phases dynamiques et d'actions magmatiques du même cycle orogénique. Wegmann établit une liaison étroite entre l'importance de la magmatisation, forme profonde de métamorphisme avec apport de substances, la hauteur qu'elle atteint dans les couches superposées d'une part, et d'autre part, l'intensité et la forme du plissement et des nappes ou écailles; il applique ces conceptions aux Alpes. Il ajoute que le mode de déformation de l'édifice supérieur et du cristallin

inférieur sont si différents que peut-être on a à tort à maints endroits envisagé des discordances.

Rheinard croit à la refusion presque complète ou la migmatisation pendant le cycle alpin d'anciennes roches cristallines pour donner naissance aux noyaux pennins; ceux-ci sont reliés dans le temps par des intermédiaires, comme cocogneiss et tonalite au granite de Bergell; il ajoute que les observations de Klemm et Rothpletz qui considéraient comme alpin les noyaux pennins, ne sont plus en contraste aussi accentué avec les conceptions des géologues suisses. Pour lui l'orogénie s'accompagne de refusion, migmatisation, granitisation. Hans Cloos écrit que différenciation et mouvement sont intimement liés.

Ainsi, s'écartant du dynamométamorphisme, une tendance se fait jour à établir une liaison entre mouvement et migmatisation, granitisation, autrement dit métamorphisme profond. Mais migmatisation implique apports de substances sans refusion, puisque subsiste la trace de l'ancienne structure, c'est un métamorphisme à l'état solide, il y a donc obligatoirement changement de volume, donc déformation. Le métamorphisme correspondant est générateur de plissement. Tout le problème est de savoir s'il est la cause originelle du plissement qui, à son tour, par amélioration de contact et déformation, facilite la progression du métamorphisme ou si un plissement d'origine mécanique est cause de migmatisation avec apports de substances, créateurs à leur tour d'effets secondaires de plissement. Ce sont les deux théories, différant par le point de départ, entre lesquelles il faudra choisir; l'étude de l'ensemble des chaînes doit donner la réponse. Il n'y a pas, comme le pense Wegmann, toujours parallélisme entre intensité du plissement et hauteur de la migmatisation. Les granites de la Kabylie de Collo, de même origine pour moi qu'une migmatite, atteignent le tertiaire dans une zone de plissement peu accentué. Je crois que l'intensité de celui-ci résulte de l'importance des échanges chimiques, donc de la nature des terrains antérieurs et il peut y avoir granitisation sans changements de volume importants. La part grandissante donnée au métamorphisme alpin m'amène à penser qu'il se suffit à lui-même si l'on ramène les nappes à une échelle raisonnable. Enfin le déplacement des continents reste hypothétique; il ne peut y avoir coupure entre Sial et Sima et Wegmann note que le *Oberbau* ou les nappes glissent sur le *Unterbau* et non sur le Sima. Aussi j'incline vers la première hypothèse.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur les oxydations respiratoires : oxydations intrinsèques et extrinsèques.* Note de M. **Lucien Plantefol**, présentée par M. Marin Molliard.

Il y a longtemps que l'attention des physiologistes a été attirée sur la complexité des échanges gazeux que l'on réunit sous le mot respiration, parce qu'ils se traduisent par une fixation d'oxygène emprunté au milieu et par un rejet de gaz carbonique dans ce milieu. Il est nécessaire de procéder à l'énumération et à l'étude de ces phénomènes, pris isolément; ils diffèrent en effet et par leur nature, et par le rôle qu'ils jouent dans les phénomènes vitaux.

Palladine a montré [1] que des feuilles étiolées, placées dans une solution de saccharose, présentent une augmentation importante de leur respiration. On sait aussi que des Levures, des Champignons ont une intensité respiratoire toute différente suivant qu'ils sont en présence d'un sucre ou non. A la suite de Palladine, on s'est représenté qu'un sucre comme le glucose pénètre dans les cellules en tant qu'aliment, y participe aux phénomènes respiratoires normaux dont il élève le niveau; son oxydation au sein des cellules aurait même pour effet de protéger les substances protéiques cellulaires contre la dégradation respiratoire.

On a au contraire émis l'hypothèse que des aliments pourraient être oxydés directement par l'oxygène libre, en milieu liquide, sur des surfaces actives. Dans le domaine physicochimique, A. Mayer et Wurmser [2] ont établi que des acides organiques pouvaient, au seul contact de charbon pulvérisé, être dégradés jusqu'à CO^2 et H^2O. J'ai montré avec A. Mayer et Houget [3] que l'acide oxalique se brûle par l'oxygène libre au contact des Mousses; oxydation purement physicochimique, car elle est 100 fois plus intense que la respiration et réalisable sur des Mousses tuées. Dans les mêmes conditions le glucose donne un phénomène faible.

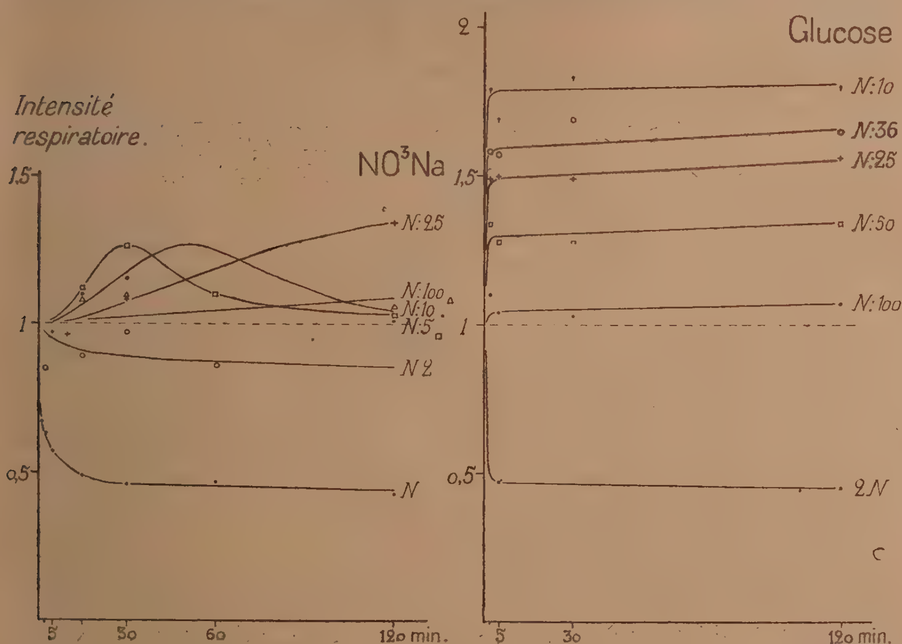
Il semble donc, *a priori*, qu'une étude physiologique puisse tenter de distinguer deux séries de phénomènes dans l'ensemble des oxydations que manifeste la matière vivante en présence d'un aliment oxydable; 1° des oxydations biologiques normales, en relation avec les fonctions qu'implique

(1) *Rev. gén. Bot.*, 5, 1893, p. 449.
(2) *Ann. de Physiol.*, 2, 1926, p. 329.
(3) *Ann. de Physiol.*, 4, 1927, p. 663.

l'état de vie, se manifestant, même en l'absence d'aliment, tant que dure la vie, si l'oxygène est présent; je propose de les appeler *oxydations intrinsèques*; 2° des oxydations produites hors des cellules vivantes, à leur contact, du fait de la structure de la matière vivante; à de telles oxydations, ne dépendant pas des fonctions qui constituent la vie, mais de la rencontre entre l'oxygène et une substance oxydable à la surface de la matière vivante, convient le nom d'*oxydations extrinsèques*.

Une première méthode d'analyse consiste à comparer les modifications du phénomène respiratoire dans les divers cas où l'on augmente son intensité.

En l'absence d'aliments extérieurs, les échanges respiratoires normaux répondent à la définition même des oxydations intrinsèques. Lorsqu'on



élève l'intensité respiratoire par l'action de solutions salines, ce sont nécessairement les oxydations intrinsèques qu'on augmente. Lorsqu'on élève l'intensité respiratoire par l'action d'un aliment oxydable, comme le glucose, celui-ci peut théoriquement agir comme un excitant des oxydations intrinsèques (c'est une expression de l'hypothèse de Palladine), ou parce qu'il déclenche des oxydations extrinsèques (c'est l'hypothèse que j'ai

formulée » ([1]). Les modalités de la réaction respiratoire à l'action des sels ou de l'aliment sont-elles identiques ? la première hypothèse est vraisemblable; diffèrent-elles profondément ? c'est au contraire la seconde qui le devient.

Deux courbes expriment les variations de l'intensité respiratoire, pour l'*Hypnum triquetrum*, après immersion pendant des temps divers en présence de solutions d'un sel (NO^3Na) ou de glucose (voir figure).

Les actions sont absolument différentes, sauf aux concentrations moléculaires élevées (NO^3Na : N — glucose : 2N) agissant également par leur forte pression osmotique. Aux concentrations produisant des augmentations d'oxydations, l'action de NO^3Na varie en fonction du temps de contact, excitation d'abord, inhibition ensuite, indiquant une pénétration progressive du sel et une réaction cellulaire; l'action du glucose est marquée par l'instantanéité avec laquelle elle se manifeste, sitôt le contact entre Mousses et solution, et par sa valeur presque fixe, quel que soit le temps de contact.

Ces faits sont totalement en faveur d'une interprétation des oxydations fournies par le glucose comme des oxydations intrinsèques.

MYCOLOGIE. — *Observations statistiques et mycologiques sur les teignes humaines au Maroc.* Note de M. **Maurice Langeron**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Au Maroc français, les teignes humaines n'ont pas encore fait l'objet d'une étude systématique. Au cours d'une mission, organisée en août-novembre 1936 par l'Institut Pasteur du Maroc, j'ai eu l'occasion d'examiner environ 3000 enfants et de recueillir 2000 échantillons de cheveux teigneux dans le Maroc occidental français, du Gharb au Rio de Oro, ainsi que dans l'Anti-Atlas, le Moyen et le Grand Atlas.

L'étude des 308 premières cultures, obtenues par l'ensemencement méthodique de ce matériel, permet de confirmer et d'étendre les résultats déjà acquis au Maroc espagnol par M. Baeza ([1]), puis par M. Langeron et M. Baeza ([2]). Au Maroc espagnol en effet, l'étude de 464 teigneux a donné 304 favus contre 160 trichophyties, dont 157 produites par des *Trichophyton endothrix* à cultures glabres (*T. violaceum* et *T. glabrum*). Au

---

([1]) *Rev. de Cytol. et Cytophysiol. vég.*, **1**, 1934, p. 1.

([1]) *Annales de parasitologie humaine et comparée*, **12**, 1934, p. 405-407.

([2]) *Ibid.*, **14**, 1936, p. 385-402, planches 15-20.

Maroc français, la proportion de trichophyties paraît bien moindre : environ 10 pour 100 (38 sur 308 cas) contre 50 pour 100 (160 sur 304). Il y a même, dans le Moyen Atlas, trois localités (Khenifra, El Kbab, Ifrane) où, sur un total de 105 teigneux, il n'a été rencontré aucun cas de trichophytie. Les trichophyties du Maroc français sont produites aussi par des *Trichophyton endothrix* à cultures glabres.

Sur 304 cas de favus clinique, au Maroc espagnol, 175 étaient produits par l'*Achorion schönleini* du type classique, à cultures glabres, cireuses, spongieuses, superficielles. Les 129 autres cas ont donné cinq types de colonies bien différentes, dont quatre ont été retrouvés au Maroc français.

Le type que nous avons nommé *milochevitchi*, immédiatement reconnaissable à ses colonies entourées d'une large zone immergée, a été trouvé 77 fois sur 304 au Maroc espagnol et 55 fois sur 270 au Maroc français. Dans cette dernière zone, le type *brumpti*, à colonies grumeleuses, jaunâtres, largement développées et pénétrantes, colorant lentement en brun le milieu de culture, a été vu dans 36 cas sur 270, contre 6 sur 304 au Maroc espagnol, où le type *debueni*, formant très lentement de petites colonies farineuses, s'est montré 22 fois sur 304, contre 31 sur 270 au Maroc français.

Le type *pittalugai*, à colonies cratériformes, très creuses et à rebord élevé, n'a été vu que 6 fois sur 270 au Maroc français, contre 15 sur 304 au Maroc espagnol. Le type *talicei*, à colonies en roue, à jante et rayons épais, rencontré 9 fois sur 304 au Maroc espagnol, n'a pas encore été trouvé dans les matériaux du Maroc français. Il importe de noter aussi que, dans ces matériaux, aucune souche ne nous a encore donné le type classique *Achorion schönleini* : ce sont les colonies du type *brumpti* qui s'en rapprochent le plus, tout en restant bien distinctes.

Cette statistique préliminaire montre donc qu'en s'éloignant du littoral méditerranéen, on voit, au Maroc, disparaître le favus classique à *Achorion schönleini*. Les caractères cliniques de la maladie restent les mêmes, mais les parasites qui la produisent sont différents : ils appartiennent à plusieurs types, bien distincts par la morphologie microscopique des cultures, mais très voisins les uns des autres par leurs caractères microscopiques, notamment l'abondance d'aleuries parfaites, manifestée par l'aspect farineux de toutes nos colonies. Le cheveu parasité est toujours un cheveu favique typique et la présence ou l'absence de godets ne paraît avoir aucun lien avec le type parasitaire.

Par contre, l'examen microscopique de ces cheveux a montré la présence

fréquente d'un caractère déjà signalé et figuré par nous pour le Maroc espagnol et aperçu quelquefois aussi par Catanei ([1]) en Algérie. C'est l'existence, autour des cheveux faviques, d'une gaine de grosses spores, en tout semblable à celle des *Trichophyton endo-ectothrix* mégasporés à cultures faviformes. L'existence certaine de cette gaine confirme le rapprochement déjà proposé par nous entre les *Achorion* humains et les mégaspores faviformes des bovins et ovins.

Ces éléments statistiques montrent, au Maroc, l'énorme prépondérance et même la présence presque exclusive de teignes humaines (favus et trichophyties) produites par des dermatophytes à cultures glabres. Cette prépondérance s'affirme au fur et à mesure qu'on descend vers le sud, où les trichophyties régressent notablement en faveur du favus. Il est vraisemblable que ces faits de distribution géographique sont, pour les dermatophytes comme pour les autres végétaux, sous la dépendance d'influences climatiques.

ZOOLOGIE. — *Signification de la glande du calcaire des* Nerita. Note ([1]) de M. J. **Risbec**.

Chez les *Nerita*, on trouve, annexé à l'utérus, un petit sac qui débouche tout près de l'orifice génital. C'est la poche du calcaire que les anglais ont appelé crystal sac. On y trouve, à certains moments, des corpuscules calcaires réfringents, sphériques, ovoïdes ou lenticulaires. Les auteurs se sont demandé quel était le rôle de cette glande. Bourne ([2]) a pensé qu'il s'agissait d'une glande destinée à la formation de la paroi de l'oothèque. Cette hypothèse était plausible, quoique, d'une manière générale, les oothèques soient formées par des sécrétions des glandes pédieuses.

Simroth ([3]) discutant le Mémoire de Bourne rejetait son hypothèse comme ne s'appuyant pas sur des observations et en proposait une autre. A son avis, le sac calcaire (*crystal sac*) serait seulement une poche du dard de Pulmoné ayant cessé d'être fonctionnelle lors de l'immersion d'un

---

([1]) *Arch. Inst. Pasteur d'Algérie*, **14**, 1936, p. 17.

([1]) Séance du 25 janvier 1937.
([2]) *Proc. Zool. Soc.*, 1908, p. 1810-87.
([3]) *Proc. Mal. Soc.*, **9**, 1910, p. 27-33.

ancêtre terrestre. Un peu de calcaire continuerait d'être secreté sous la forme commune de calco-sphérites mais sans qu'aucun dard soit formé.

La manière de voir de Simroth n'était pas appuyée non plus sur des observations et avait sur celle de Bourne le désavantage de ne pas même être logique. C'est une de ces hypothèses qu'il est absolument impossible de vérifier comme exactes mais dont on peut heureusement prouver qu'elles sont fausses. Bourne avait raison.

D'autre part, les pontes de *Nerita* n'étaient connues que par une description de Hedley pour *N. melanotragus* E. A. Smith. Cet auteur avait cru que la ponte était constituée par une membrane sur laquelle les œufs étaient incrustés et visibles ainsi de l'extérieur. En réalité j'ai montré (4), pour *N. abicilla* L. et *N. reticulata* Karsten, que les œufs sont enveloppés dans une oothèque lenticulaire, fixée d'un côté au rocher, présentant de l'autre une membrane sur laquelle les prétendus œufs de Hedley sont en réalité de petites granulations calcaires réfringentes.

Pour *N. albicilla* et *N. reticulata*, j'ai pu ainsi observer à la fois la glande du calcaire sur l'animal frais et les oothèques. Or les granulations de la glande sont celles qu'on retrouve dans la paroi de l'oothèque. Lors de la ponte, le pied doit déposer, comme à l'ordinaire, une lame basilaire recouvrant le support, amener ses œufs au-dessus de la lame, puis, en même temps que les grains de calcaire sont amenés, à la manière des œufs, les cimenter à l'aide de sa sécrétion propre.

Ainsi se trouvent expliqués, à la fois, le rôle de cette glande calcaire assez énigmatique et la constitution très curieuse de la paroi des oothèques. Celle-ci a une origine double; d'une part les calco-sphérites sécrétés par la glande annexée à l'utérus, de l'autre un ciment fourni par la glande pédieuse.

Il y a lieu de remarquer pour terminer que la constitution très résistante des oothèques est en rapport avec la très longue durée nécessaire au développement des œufs et des larves. Ce développement, à l'intérieur de l'oothèque dure, en effet, environ 2 mois. Ce n'est qu'à l'état de petites *Nérites*, de forme définitive, que les jeunes quittent leur abri après être passés par le stade veliger. Il est nécessaire aussi que l'enveloppe soit bien protégée car les pontes sont déposées en des lieux exposés. On les trouve sur des rochers battus des vagues et même, très souvent, sur les coquilles

---

(4) *Soc. Zool.*, 57, 1932, p. 358-376.

d'exemplaires vivants de l'espèce, ou alors elles sont encore plus souvent en danger de destruction. La forme lenticulaire, très surbaissée de l'oothèque, constitue d'ailleurs une première protection.

ZOOLOGIE. — *Les Araignées apneumones.*
Note [1] de M. **Louis Fage**, présentée par M. Charles Gravier.

Jusqu'en 1913 il paraissait établi que, seuls de toutes les Araignées, les représentants de la famille des *Caponiidæ* étaient dépourvus de sacs pulmonaires remplacés chez eux par des trachées antérieures.

A cette date je fis connaître [2] la disposition très remarquable des organes respiratoires du *Telema tenella* E. S., espèce minuscule, aveugle et propre aux grottes des Pyrénées Orientales. Là aussi les poumons sont absents : les stigmates antérieurs, situés de chaque côté de l'épigastre, à la place qu'occupent normalement les stigmates pulmonaires, donnent chacun accès à un vestibule très court, d'où partent isolément quatre troncs trachéens volumineux. Les stigmates postérieurs, également indépendants l'un de l'autre, sont situés à égale distance de l'épigastre et des filières; de leur vestibule assez court partent cinq à six branches principales, isolées dès la base.

Quelques années plus tard, je décrivis [3] une disposition analogue chez l'*Apneumonella oculata* Fage des grottes de l'Afrique Orientale, qui, avec l'espèce précédente, devait former la famille des *Telemidæ*.

Dix ans après, V. H. Hickman [4] put ajouter à cette courte liste une espèce de Tasmanie, le *Symphytognatha globosa* Hickman, dont les poumons absents sont également remplacés par des trachées, et dont la femelle présente de plus cette anomalie singulière d'être privée du palpe de la patte-mâchoire. Les lames-maxillaires sont présentes, mais leur palpe est réduit à un infime rudiment. En raison surtout de ces deux caractères exceptionnels, Hickman proposa de ranger cette espèce dans une famille spéciale, celle des *Symphytognathidæ*.

Or l'absence de palpe à la patte-mâchoire n'est pas spéciale à cette

---

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) *Arch. Zool. exp. et gén.*, 5e série, **10**, 1913, p. 489.

(3) *Comptes rendus*, **172**, 1921, p. 160, et *Arch. Zool. exp. et gén.*, **60**, 1922, p. 528.

(4) *Proc. Zool. Soc.*, London, 1931, (2), fig. 6, p. 1321.

forme. E. Simon (4) avait déjà signalé ce caractère insolite chez les représentants des *Anapeæ* de l'Ancien Monde pour lesquels il avait proposé les genres *Pseudanapis* et *Anapogonia*.

Il m'a paru intéressant, aussi bien pour fixer la position systématique de ces différents genres que pour rechercher si l'absence de patte-mâchoire et celle de poumon pouvaient être envisagées comme des caractères corrélatifs, d'examiner les organes respiratoires de quelques-unes de ces espèces litigieuses, espèces de dimensions extrêmement réduites, dépassant de peu le millimètre et malheureusement fort rares dans les collections.

Cette étude a révélé deux faits importants : 1° l'absence de poumons et leur remplacement par des trachées spiralées non seulement dans les genres *Pseudanapis*, *Chasmocephalon* et très probablement *Anapogonia* d'Europe, d'Afrique, Nouvelle-Calédonie et Insulinde, mais aussi dans le genre *Anapis* du Nouveau-Monde; 2° l'absence de trachées postérieures dans tous les genres dont les femelles sont privées de pattes-mâchoires, c'est-à-dire dans les trois premiers genres énumérés ci-dessus et en outre dans le genre *Symphytognatha*.

Nous connaissons donc maintenant trois familles d'Araignées apneumones : celles des *Caponiidæ*, des *Telemidæ* et des *Symphytognathidæ*, cette dernière comprenant désormais, outre le genre *Symphytognatha*, les genres *Pseudanapis*, *Chasmocephalon* et *Anapogonia*. Quant au genre américain *Anapis*, bien que également apneumone, il mérite sans doute une place à part en raison de l'existence de trachées postérieures et de pattes-mâchoires normales.

Il est en tout cas fort curieux de constater la corrélation existant entre la perte du palpe de la patte-mâchoire chez la femelle, caractère encore plus exceptionnel (puisque, dans l'ordre entier des Araignées, il ne s'observe que chez les *Symphytognathidæ*) et la perte des trachées postérieures. Si l'on admet que la patte-mâchoire des Arachnides correspond aux mandibules des Crustacés, c'est l'organe homologue au palpe mandibulaire qui fait ici défaut. De telles anomalies sont fréquentes chez les Crustacés mais, on le voit, extrêmement rares chez les Arachnides où ce palpe subit, au contraire et le plus souvent, une évolution très spécialisée le rendant apte à la marche, à la préhension et, chez tous les mâles d'Araignées, à la copulation.

---

(4) *Mitt. Naturh. Museum*, 22, 1905, p. 63.

ZOOLOGIE. — *Quelques observations sur le développement embryonnaire des Madréporaires.* Note de M. **Constantin Dawydoff**, présentée par M. Maurice Caullery.

Durant mon séjour en Indochine, j'ai eu l'occasion d'étudier l'embryogénie des Madréporaires. Mes recherches ont porté sur plusieurs formes (*Cyphastræa*, *Favia*, *Stylophora*, *Mæandrina*, *Goniastræa*, *Seriatopora*, *Pœcillopora*, *Acropora*).

Ayant en vue de vérifier les résultats des recherches de Krempf, qui sont en contradiction avec tous les principes de l'embryologie et de la morphologie des Anthozoaires, j'ai fixé mon attention sur les espèces mêmes qui ont fait l'objet des études de cet observateur : *Pœcillopora cespitosa* Lam. et *Seriatopora gracilis* Dana.

L'ovule très jeune de *Seriatopora*, inclus dans la paroi mésentérique maternelle, présente une large zone centrale cytoplasmique, au centre de laquelle se trouve le noyau volumineux. A la périphérie de l'ovule, on distingue des granulations formées d'une substance d'apparence cristalloïde, qui se colorent en noir par l'acide osmique. A la fin de l'ovogenèse, ces cristalloïdes se concentrent au pôle animal de l'œuf, en y constituant une couche délimitée, mince, mais assez étendue. La zone cytoplasmique se déplace aussi vers le pôle animal de l'œuf et c'est précisément dans cette zone que se sont localisées les granulations cristalloïdes.

L'œuf prêt à la segmentation est gorgé de vitellus et son noyau est très difficile à discerner; il perd de sa netteté bien avant les stades terminaux de l'ovogenèse. L'œuf non fécondé de *Seriatopora* ne possède jamais de zooxanthelles, bien que la cloison maternelle, où il est inclus, en soit bourrée. Ces algues ne pénètrent dans l'embryon qu'après la segmentation.

Chez *Pœcillopora*, les granulations cristalloïdes n'apparaissent pas. En tout cas, elles ne constituent jamais dans l'œuf une formation quelque peu localisée. La particularité la plus remarquahle de l'ovogenèse de *Pœcillopora* consiste en l'apparition très précoce de zooxanthelles dans l'œuf. Ces zooxanthelles passent de la cloison maternelle dans l'ovule à des stades très jeunes, et, en tout cas, avant la fécondation, qui a lieu avant la fin de la croissance. Il semble que, pour que ces algues puissent pénétrer dans l'œuf, ce dernier doit être mûr. Quoiqu'il en soit, l'œuf fécondé

manifeste toujours la présence des zooxanthelles; elles sont placées excentriquement et ne sont jamais nombreuses à ces stades. La cloison maternelle contenant l'ovule ne contient d'ailleurs, chez *Pœcillopora*, qu'un nombre assez restreint d'algues parasites.

Chez tous les Madréporaires que j'ai étudiés, les zooxanthelles se localisent toujours chez l'embryon dans l'entoderme et surtout dans la zone périphérique de celui-ci, au voisinage immédiat de l'ectoderme; jamais on n'observe la présence de zooxanthelles dans l'ectoderme, ni chez l'embryon, ni chez la larve.

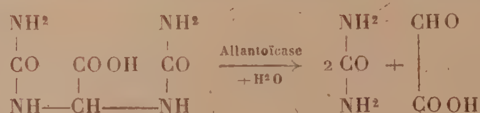
Chez tous les Madréporaires étudiés, la segmentation de l'œuf qui est surchargé de vitellus, est superficielle (intravitelline). Le noyau initial de l'œuf se divisant donne naissance à des noyaux fils qui se divisent à leur tour. Les caryocinèses sont bien reconnaissables. Tous ces noyaux gagnent la périphérie de l'œuf en suivant les tractus cytoplasmatiques qui garnissent tous les intervalles entre les sphérules de vitellus, et il se constitue ainsi un réseau syncytial. A la fin de la segmentation, toute la zone périphérique de l'œuf renferme un très grand nombre de noyaux disposés en plusieurs couches et mêlés avec les zooxanthelles. Une partie des noyaux reste dans la zone centrale de l'œuf, où l'on trouve souvent aussi des zooxanthelles isolées.

Il me semble qu'on peut observer parfois (*Goniastræa*, *Favia*) une différenciation dans la structure des noyaux centraux et périphériques, peut-être en rapport avec leurs potentialités entodermiques ou ectodermiques futures. Chez la plupart des espèces examinées, la zone périphérique de l'embryon, où se trouvent accumulés densément les noyaux immigrés, est généralement très épaisse et représente histologiquement un syncytium, dans lequel les éléments ecto- et entodermiques sont mêlés. La formation des feuillets germinatifs se fait par une sorte de délamination syncytiale. Les noyaux de la zone périphérique se disposent en deux couches superposées, qui finissent par se transformer en deux assises épithéliales, dont la superficielle donne l'ectoderme, tandis que la couche sous-jacente, avec la masse centrale syncytiale, représente l'ébauche de l'entoderme. La différenciation de l'épithélium entodermique à la périphérie de cette masse et l'apparition de la cavité gastrulaire dans son centre sont assez tardives. Chez *Seriatopora* et *Pœcillopora*, cette cavité gastrulaire est très réduite et l'entoderme durant toute la vie embryonnaire reste fortement vacuolisé et très peu différencié. Chez *Stylophora digitata* Pall, au contraire, le gastro-

cœle est bien développé et l'entoderme qui le tapisse se présente sous forme d'une assise cellulaire, assez épaisse et aussi très vacuolisée, mais souple. Chez tous les Madréporaires étudiés (sauf *Stylophora*), à l'intérieur de la cavité gastrulaire de l'embryon, on trouve toujours une réserve de vitellus inerte. C'est une portion centrale non différenciée du syncytium vitellin qui sert à la nutrition de l'embryon et qui est résorbée chez les larves libres.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Un nouvel enzyme, l'allantoïcase. Sa présence dans le règne animal.* Note (1) de M. **Arthur Brunel**, présentée par M. Richard Fosse.

L'*allantoïcase*, nouvelle hydrolase qui possède la propriété de scinder l'acide allantoïque en deux molécules d'urée et une molécule d'acide glyoxylique,



a été signalée pour la première fois dans les mycéliums de *Sterigmatocystis nigra* et de *Sterigmatocystis phœnicis* (2).

Nous nous proposons de démontrer que les végétaux ne sont pas les seuls êtres vivants capables, par voie enzymatique, de transformer l'acide allantoïque en urée et acide glyoxylique, mais que cette propriété appartient aussi à certains animaux.

Recherche d'un enzyme hydrolysant l'acide allantoïque dans le foie de *Raja clavata* L.

Préparation d'une poudre de foie de Raie. — Le foie de Raie broyé à l'appareil Latapie est additionné de son poids d'eau; après deux heures de contact, la macération est précipitée par cinq fois son volume d'alcool à 96°. On centrifuge très rapidement, on lave le dépôt quatre fois à l'éther anhydre, puis on le sèche dans le vide sur chlorure de calcium; la matière ainsi obtenue après broyage constitue la poudre enzymatique.

---

(1) Séance du 25 janvier 1937.

(2) A. Brunel, *Le métabolisme de l'azote d'origine purique chez les Champignons* (*Thèse Doct. Sc. Nat.*, Paris, 1936).

Expériences. — On place au bain d'eau à 38°, dans des tubes à centrifuger, des milieux de composition :

	E.	T.
Mélange tampon de Clark et Lubs à pH = 7,3......	20$^{cm^3}$	20$^{cm^3}$
Allantoate de potassium........................	0g,04	0g,04
Poudre de foie de Raie.........................	0g,20	–
Même poudre portée 30 minutes à 100° pour détruire les enzymes..............................	–	0g,20
Toluène (gouttes).............................	10	10

Préparation du milieu T. — On pèse 0g,2 de poudre enzymatique dans un tube à centrifuger, on ajoute 10$^{cm^3}$ du mélange tampon et l'on porte le tout au bain d'eau à 100°, au reflux, pendant 30 minutes. Après refroidissement complet on ajoute encore 10$^{cm^3}$ du mélange tampon, puis l'allantoate de potassium et le toluène.

Expériences E *et* T. — Après 1 heure, 2 heures, 3 heures, on recherche dans E et T l'acide glyoxylique par la très sensible réaction colorée phénylhydrazinique de R. Fosse et A. Hieulle (3) et l'urée par sa combinaison dixanthylée. Les résultats sont positifs pour E et négatifs pour T.

Alors que, dans l'expérience E, il est facile de caractériser la formation de la carbamide et de l'acide glyoxylique par voie enzymatique, dans l'expérience T, où les enzymes ont été détruits par la chaleur, on ne constate pas de production d'urée et d'acide glyoxylique aux dépens de l'acide allantoïque.

Ces expériences démontrent l'existence dans le foie de *Raja clavata* L. de l'*allantoïcase*, hydrolase qui scinde l'acide allantoïque en acide glyoxylique et urée.

L'*allantoicase* a pu aussi être caractérisée dans le foie de *Raja punctata* Risso et dans le foie de certains Batraciens : *Rana esculenta* L. ♂♀, *Rana temporaria* ♂♀ et *Rana agilis* Thomas ♂♀.

Conclusion. — Des recherches antérieures de St. J. Przylecki (4) ont établi la propriété des Poissons et des Batraciens de dégrader l'acide urique en urée en passant par l'allantoïne. En réalité cette dégradation comporte une étape supplémentaire : l'acide allantoïque (5), qui est ensuite scindé en urée et acide glyoxylique par l'allantoïcase.

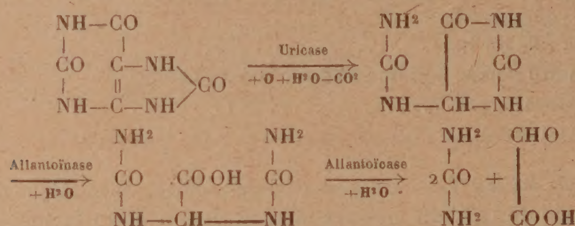
---

(3) *Comptes rendus*, **179**, 1924, p. 637.

(4) *Arch. Inter. Physiol.*, **24**, 1925, p. 317.

(5) R. Fosse, A. Brunel et P. De Graeve, *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 79.

Le mécanisme du catabolisme de l'azote d'origine nucléoprotéique chez les Sélaciens (Rajidés) et chez les Batraciens (Ranidés) peut donc se schématiser de la façon suivante :



L'*allantoicase* vient prendre place dans la série des enzymes de dégradation du noyau purique : *purinoxydases*, *uricase*, *allantoinase*, *allantoicase* et *uréase*.

SÉROLOGIE. — *Sur les relations entre l'alexine et la protéine visqueuse du sérum.* Note de M. **Maurice Doladilhe**, présentée par M. Félix Mesnil.

Après une dialyse d'une dizaine d'heures, coupée de fréquents changements d'eau, un sérum sanguin est suffisamment déminéralisé pour que sa protéine visqueuse ([1]) soit sensible à l'action floculante des ions hydrogène. Séparée dans ces conditions, cette protéine possède, à un degré notable, les propriétés que nous exposons ci-dessous :

Elle augmente le pouvoir alexique d'un sérum sanguin auquel on l'additionne; elle accélère et intensifie, en effet, l'hémolyse, par ce sérum, de globules rouges sensibilisés.

Elle réactive un sérum chauffé, c'est-à-dire qu'elle lui rend, en partie tout au moins, les propriétés hémolytiques que le chauffage lui avait enlevé.

Elle rend les globules rouges sensibilisés conglutinables par le sérum inactivé du bœuf.

([1]) Doladilhe, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1295.

Elle provoque très souvent l'hémolyse de globules rouges sensibilisés et se montre inactive vis-à-vis de globules rouges non sensibilisés.

Ces propriétés s'exercent avec une intensité d'autant plus prononcée que la quantité de la protéine visqueuse est plus grande et qu'elle provient d'un sérum plus riche en alexine.

Un chauffage suffisant, un vieillissement prolongé lui enlèvent complètement ces propriétés.

Ces faits montrent que la protéine visqueuse possède les caractères de l'alexine.

M. Charles Carrière adresse une Note intitulée *Appareil à disques gradués pour la gynécologie et autres usages.*

A 15h35m l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section d'Astronomie, par l'organe de M. E. Esclangon, remplaçant le Doyen empêché, présente la liste suivante de candidats à la place vacante par le décès de M. *M. Hamy* :

En première ligne	M. **Jean Chazy.**
En seconde ligne, ex æquo *par ordre alphabétique*....	MM. **Jules Baillaud,** **Armand Lambert,** **Bernard Lyot.**
En troisième ligne, ex æquo *par ordre alphabétique*....	MM. **Lucien d'Azambuja,** **Fernand Baldet.**

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 17h.

A. Lx.

